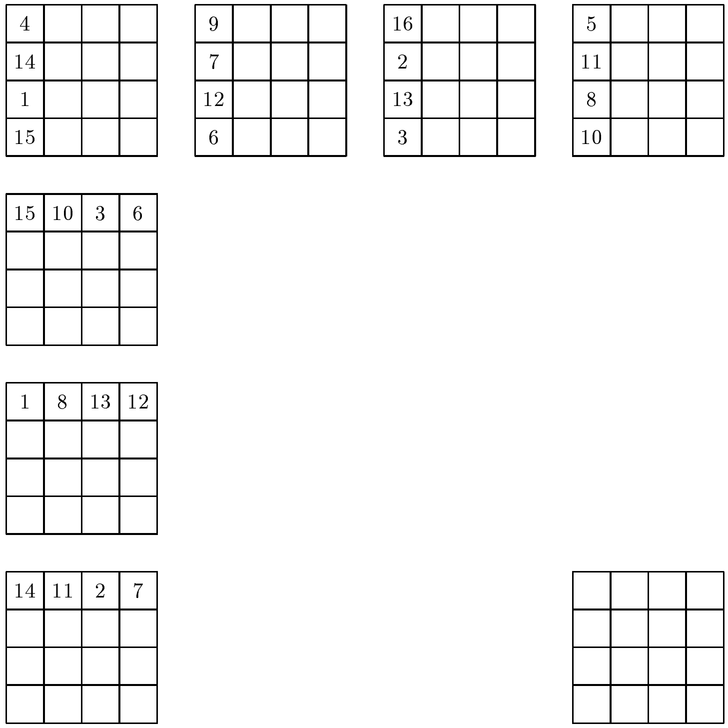

Elementos de Teoría Combinatoria

15863724

Vicente Yriarte
Universidad Simón Bolívar

Elementos de Teoría Combinatoria

Vicente Yriarte
Universidad Simón Bolívar

Caracas, septiembre de 1996

Resumen de la Notación

A continuación se muestra una lista de la notación que se usa en este libro junto con su descripción y la página donde aparece por primera vez.

Notación	Descripción	Página
$\ln x$	logaritmo neperiano: $\log_e x$	88
$\lg x$	logaritmo binario: $\log_2 x$	
$\log x$	logaritmo natural: $\log_{10} x$	151
$\lfloor x \rfloor$	piso de x: $\max\{n \leq x, n \text{ entero}\}$	20
$\lceil x \rceil$	techo de x: $\min\{n \geq x, n \text{ entero}\}$	20
$[n]$	sección inicial de naturales $[n] = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$	3
$\binom{n}{k}$	no. de $k-$subconjuntos de un $n-$conjunto	6
$n^{\underline{k}}$	factorial descendente, no. de $k-$subconjuntos linealmente ordenados de un $n-$conjunto.	3
$n!$	factorial: no. de órdenes lineales de un $n-$conjunto	2
A^B	conjunto de las funciones de B en A	3
$\mathbf{1}_B$	función indicatriz del conjunto $B \subseteq [n]$	4
$\mathcal{P}(A) = 2^A$	conjunto de los subconjuntos de A	3
$\mathcal{P}_k(A) = \binom{A}{k}$	conjunto de los $k-$subconjuntos de A	6
$C_k(n)$	no. de $k-$composiciones de n	10
$d_k(n)$	no. de $k-$composiciones débiles de n	11
$n^{\overline{k}}$	factorial ascendente, no. de disposiciones de k objetos en n cajas	11
$\left(\!\binom{A}{k}\!\right)$	conjunto de los $k-$multiconjuntos de A	12
$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$	no. de $k-$multiconjuntos de un n conjunto	12
$\binom{n}{m_1, \ldots, m_k}$	permutaciones de multiconjuntos	14
B_n	números de Bell, no. de particiones de un conjunto	16
$\mathcal{L}(A)$	conjunto de los órdenes lineales del conjunto A	3
$S_k(n)$	no. de Stirling de segunda especie, no. de particiones de un $n-$conjunto en k bloques	16

$s_k(n)$	números de Stirling de primera especie	120
$\|A\|$	cardinalidad de A, i.e, no. de elementos de A	3
$\mathbb{N}$	conjunto de los números naturales	12
$\mathbb{N}^*$	naturales mayores que cero ($\mathbb{N} - \{0\}$)	24
d_n	no. de desarreglos de un $n-$conjunto	58
$f^{(n)}(x)$	Derivada $n-$ésima de la función $f(x)$	86
$[P(x)]$	corchete de Iverson	101
Δ	operador diferencia	114
E	operador desplazamiento	115
Σ	operador suma	127
$x^{(m)}$	función factorial	119
H_n	números armónicos	40
$\Gamma(n)$	función gamma	138
$o(f)$	o chica	150
$O(f)$	O grande	153
$\Theta(f)$	theta grande	156
$\Omega(f)$	omega grande	155
$\prec$	asintóticamente despreciable	150

Contenidos

Decir dos veces las cosas.—Bueno es expresar una cosa doblemente y darle un pie derecho y un pie izquierdo. La verdad puede, es cierto, tenerse sobre un pie; pero sobre dos marchará y hará su camino.

Federico Nietzsche.

Capítulo 1

Técnicas de Contar

1.1 Principio Fundamental

Si una operación puede realizarse de n maneras y una vez realizada dicha operación de cualquiera de esas maneras, una segunda operación puede hacerse de m maneras, entonces el número total de maneras en que las dos operaciones pueden realizarse en ese orden es nm.

Ejemplo 1.1 Palabras de un Alfabeto
Con las letras del alfabeto $\Gamma = \{a, b, c, d, e\}$, *¿cuántas palabras de 3 letras pueden hacerse?*

Las operaciones consisten en elegir la primera letra, lo cual puede hacerse de 5 formas diferentes; después elegir la segunda, que también puede seleccionarse de 5 formas, y así sucesivamente. Por lo tanto, el número de palabras de tres letras que pueden formarse con Γ es:

$$5 \times 5 \times 5 = 5^3$$

En general, el número de palabras de k letras que pueden formarse con un alfabeto de n letras es n^k.

Ejemplo 1.2 Ordenes Lineales
Un orden lineal de un conjunto de tamaño n *es una cualquiera de las formas de ordenar sus elementos en una línea recta. ¿Cuántos órdenes lineales tiene un conjunto de* n *elementos?*

Las operaciones consisten en elegir el elemento que ocupe la primera, la segunda, la tercera..., la $n-$ésima posición del orden. Es como colocar los elementos en n cajitas ordenadas, y la $i-$ésima operación es elegir quién ocupará la $i-$ésima cajita. La primera cajita puede ser ocupada por cualquiera de los n elementos del conjunto, esto es, hay n posibilidades para esta primera elección. Una vez elegido el primero, sólo quedan $n-1$ elementos a elegir para la segunda cajita. Para la tercera elección hay $n-2$ posibilidades, y así sucesivamente hasta llegar a la última cajita para la cual hay una única posibilidad. De esto se concluye, con base en el principio fundamental, que el número de órdenes lineales de un conjunto de n elementos es:

$$n(n-1)(n-2)\ldots 2\cdot 1$$

Además el conjunto vacío tiene un solo orden lineal[1], a saber, el orden vacío. Podemos definir, por lo tanto, la función factorial como:

$$n! = \begin{cases} n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

y decir que dicha función cuenta el número de órdenes lineales de un conjunto de n elementos. En otras palabras, cuenta el número de maneras de ordenar linealmente los elementos de un conjunto de n elementos.

Ejemplo 1.3 Subconjuntos linealmente ordenados de tamaño k de un conjunto de n elementos

¿De cuántas maneras se pueden tomar k elementos ordenados de un conjunto de n elementos?. Esta pregunta es equivalente a: ¿Cuántos órdenes lineales de k elementos se pueden hacer con los elementos de un conjunto de n elementos?

En este caso las operaciones consisten en elegir cada uno de los k elementos que formarán el subconjunto ordenado. El primero se puede elegir de n formas diferentes porque hay exactamente n elementos para elegir. Una vez elegido el primero, sin importar cual haya resultado elegido, el segundo se puede elegir de $n-1$ formas diferentes. Cuando nos toca elegir el $k-$ésimo, nos quedan $n-k+1$ elementos, por lo que esta última elección se puede realizar de $n-k+1$ formas. Usando el principio fundamental de la teoría combinatoria resulta que el número de subconjuntos linealmente ordenados de tamaño k de un conjunto de n elementos es:

$$n^{\underline{k}} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

[1] Caveat: No es una convención, realmente tiene uno. Recuerde que un orden lineal es un conjunto parcialmente ordenado en el cual cada par de elemento es comparable

Este número se denomina el *factorial descendente* por su parecido con la función factorial. Se puede leer *n a la k descendente*. Cuenta el número de subconjuntos linealmente ordenados de tamaño k de un conjunto de n elementos. Además, si $k = 0$ el subconjunto tomado es el vacío y hay una sola forma de ordenar el vacío—el orden vacío—.Por lo tanto, podemos definir el factorial descendente como

$$n^{\underline{k}} = \begin{cases} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) & \text{si } k \geq 1 \\ 1 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

En ocasiones es conveniente denotar al conjunto de los órdenes lineales de un conjunto A de n elementos por $\mathcal{L}(A)$ o por $\mathcal{L}(n)$, y al conjunto de los subconjuntos ordenados de k elementos de A por $\mathcal{L}_k(n)$.

Ejercicio 1.1 *¿Cuántas funciones hay de $[k] = \{1, 2, 3, \ldots k\}$ en $[n]$? ($[n]^{[k]} = \{f : [k] \to [n]\}$). ¿Cuántas de ellas son inyectivas?*

Ejercicio 1.2 *Se desea colocar 3 bolas enumeradas del 1 al 3 en 5 cajas etiquetadas con las letras a, e, i, o, u. ¿De cuántas formas diferentes se puede hacer esto? ¿Cual sería la respuesta si toda caja debe tener máximo una bola?*

1.2 Principio de Igualdad—Biyecciones

En muchas situaciones es posible que estemos interesados en contar los elementos de un conjunto y no demos con una forma fácil de contarlos; sin embargo, puede que exista una correspondencia biunívoca entre sus elementos y los de otro conjunto que nos sea más fácil contar, o que ya hayamos contado. En tal caso, basta con que exhibamos una biyección entre los dos conjuntos involucrados y que contemos el segundo conjunto. Esto se conoce como el principio de igualdad, y formalmente establece que si $f : A \to B$ es biyectiva, entonces $|A| = |B|$. ($|A|$ es la cardinalidad del conjunto A, esto es, el número de elementos de A)

Usemos este principio para contar los subconjuntos de un conjunto. Si A es un conjunto finito con n elementos representaremos al conjunto de sus subconjuntos por $\mathcal{P}(A)$ o por $\mathcal{P}(n)$ (Conjunto de las partes de A). También suele representarse por 2^A.

Ejemplo 1.4 *¿Cuántos subconjuntos tiene un conjunto de n elementos?*

Explicación: Sin pérdida de generalidad, consideremos que la pregunta es: ¿cuántos subconjuntos tiene $[n] = \{1, 2, \ldots n\}$?, pues, como existe una biyección entre $[n]$ y cualquier conjunto de n elementos, entonces existe una biyección entre $\mathcal{P}(n)$ y $\mathcal{P}(A)$ si $|A| = n$.

Luego asociamos a cada subconjunto de $[n]$ la $n-$tupla de ceros y unos que contiene un 1 ó un 0 en la $i-$ésima posición si el elemento i pertenece o no al subconjunto. Esta es claramente una biyección, por lo tanto nuestro problema ahora es contar cuántas $n-$tuplas de ceros y unos hay. Problema que es equivalente a contar cuántas palabras de n letras hay en un alfabeto de dos letras y cuya respuesta es 2^n.

Para responder a la pregunta de manera más formal dividamos el problema en dos partes: Hallar una biyección de los subconjuntos de $[n]$ en el conjuntos de las funciones de $[n]$ en $\{0,1\}$ y luego contar cuántas funciones de $[n]$ en $\{0,1\}$ hay.

Sea $\{0,1\}^{[n]}$ el conjunto de las funciones de $[n]$ en $\{0,1\}$ y definimos $\varphi : \mathcal{P}(n) \to \{0,1\}^{[n]}$ como: $\varphi(B) = \mathbf{1}_B$, donde $\mathbf{1}_B$ es la función característica del conjunto B, esto es,

También se suele denotar por χ_B

$$\mathbf{1}_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in B; \\ 0, & \text{si } x \notin B. \end{cases}$$

Esta función es biyectiva porque si $\varphi(B_1) = \varphi(B_2)$, entonces $\mathbf{1}_{B_1} = \mathbf{1}_{B_2}$ implicando que $B_1 = B_2$, y $\forall (f : [n] \to \{0,1\})$ consideramos $B = f^{-1}(1) \subseteq [n]$ y $\varphi(B) = \mathbf{1}_B = f$.

Por otro lado, para contar las funciones de $[n]$ en $\{0,1\}$ basta observar cuántas imágenes posibles hay para cada elemento de $[n]$. El 1 puede tener dos imágenes, una vez elegida la imagen del 1 el 2 puede tener 2 imágenes, etc, etc, por consiguiente, por el principio fundamental hay 2^n funciones de $[n]$ en $\{0,1\}$ y, por lo tanto, por el principio de igualdad, hay 2^n subconjuntos de $[n]$. $\bullet$

Ejemplo 1.5 *Exhiba una biyección para demostrar que el número de órdenes lineales de un conjunto de n elementos es igual al número de permutaciones de dicho conjunto.*

Explicación: Sea A un conjunto con n elementos, denotemos por $\mathcal{S}(A)$ al conjunto de las permutaciones del conjunto A y por $\mathcal{L}(A)$ al conjunto de los órdenes lineales de A. Puesto que $|A| = n$ se puede escribir a A como $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Defínase $\varphi : \mathcal{S}(A) \to \mathcal{L}(A)$ como $\varphi(\sigma) = \sigma(a_1)\sigma(a_2)\cdots\sigma(a_n)$, esto es, la imagen de la permutación σ es el orden lineal $\sigma(a_1)\sigma(a_2)\cdots\sigma(a_n)$. φ es inyectiva porque si $\varphi(\sigma) = \varphi(\tau)$, entonces $\sigma(a_1)\sigma(a_2)\cdots\sigma(a_n) = \tau(a_1)\tau(a_2)\cdots\tau(a_n)$; por consiguiente $\forall i(\sigma(a_i) = \tau(a_i))$ y por lo tanto $\sigma = \tau$. φ es sobreyectiva, porque si $b_1 b_2 \cdots b_n \in \mathcal{L}(A)$

se tiene que $b_1, b_2, \ldots, b_n$ son elementos distintos de A y por lo tanto se puede definir una permutación σ como $\sigma(a_1) = b_1, \sigma(a_2) = b_2 \ldots, \sigma(a_n) = b_n$ y por consiguiente $\varphi(\sigma) = \sigma(a_1)\sigma(a_2)\cdots\sigma(a_n) = b_1 b_2 \ldots b_n$ •

Ejercicio 1.3 *Demuestre que el número de funciones de $[n]$ en $\{0,1\}$ es igual que el número de $n-$tuplas de ceros y unos. Más aún, demuestre que $|[n]^{[k]}| = |\{(x_1, x_2, x_3, \ldots x_k) : x_i \in [n]\}|$.*

1.3 Principio del Pastor

Dicen que los pastores en el momento de contar sus ovejas, en lugar de contar sus cabezas, cuentan sus patas y después dividen entre cuatro. Esto es, cuentan el conjunto de las patas de las ovejas que es un conjunto más grande pero que resulta más fácil de contar y dividen entre el número de patas que tiene una oveja. Esto pueden hacerlo gracias a que toda oveja tiene exactamente cuatro patas.

Como generalización de este procedimiento se obtiene el conocido **principio del pastor** que informalmente establese que: Si Ud. tiene que contar un conjunto B y existe un conjunto A, que resulta más fácil de contar y sabe que por cada elemento de x de B hay exactamente k elementos de A que están asociados únicamente con x, entonces basta con que cuente los elementos de A y los divida entre k.

Formalización: Dada una función $f : A \longrightarrow B$ para todo $b \in B$, se define la imagen inversa(o preimagen) de b como $f^{-1}(b) = \{x \in A : f(x) = b\}$. Se tiene que $f^{-1}(b) \subseteq A$. Las fibras de f son las preimágenes no vacías. Formalmente el **principio de pastor** establece que: si todas las fibras de $f : A \longrightarrow B$ tienen el mismo tamaño k y f es sobreyectiva, entonces $|A| = k|B|$.

Ejemplo 1.6 Subconjuntos de tamaño k de un conjunto de tamaño n.
Sea A un conjunto con n elementos, esto es, $|A| = n$ y definimos a $\mathcal{P}_k(A) = \{B \in \mathcal{P}(A) : |B| = k\}$. Queremos hallar $|\mathcal{P}_k(A)|$.

Si $k > |A|$ entonces $\mathcal{P}_k(A) = \emptyset$ y por consiguiente $|\mathcal{P}_k(A)| = 0$

Considérese la función que asigna a un subconjunto ordenado de tamaño k, el correspondiente subconjunto de tamaño k.

$$\varphi : \mathcal{L}_k(A) \longrightarrow \mathcal{P}_k(A)$$

Claramente φ es sobreyectiva, y como cada conjunto de tamaño k se puede ordenar de $k!$ formas diferentes, se tiene que cada fibra de φ tiene cardinalidad $k!$. Por lo tanto, usando el principio del Pastor tenemos que

$$|\mathcal{P}_k(A)| = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$

De aquí en adelante, usaremos por definición $\binom{n}{k}$ como el número de subconjuntos de tamaño k de un conjunto de tamaño n, y lo calcularemos con la fórmula:

$$\binom{n}{k} = |\mathcal{P}_k(A)| = \frac{n^{\underline{k}}}{k!}$$

(escoger k de n: formas de escoger k elementos de entre n)

Otra notación usual para el conjunto de los $k-$subconjuntos del conjunto A es $\binom{A}{k}$. No debe confundirse con $\binom{n}{k}$: la primera es un conjunto, mientras que la segunda es la cardinalidad de dicho conjunto, esto es,

$$|\binom{A}{k}| = \binom{n}{k} \text{ si } \quad |A| = n \ .$$

Ejemplo 1.7 Permutaciones Circulares u Órdenes Circulares *¿De cuántas maneras se pueden ordenar n elementos de un conjunto formando un círculo? Dos de estos órdenes son iguales si cada elemento tiene los mismos dos vecinos y del mismo lado. En otras palabras, si una rotación los hace coincidir, entonces son el mismo orden, de lo contrario, si ninguna rotación los hace coincidir son diferentes.*

Considere la función que toma un orden lineal de un conjunto de n elementos y le asigna el orden circular que resulta de unir los dos extremos del orden lineal para que formen un círculo. Esta función es sobreyectiva y cada una de sus fibras tiene cardinalidad n. Por lo tanto, por el principio del pastor se tiene que el número de órdenes circulares de un conjunto de n elementos es:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

Otra forma de resolver el problema es:
En uno de tales órdenes no importa la posición de ningún elemento, lo que importa realmente es qué vecinos tiene, por lo tanto se toma un elemento al azar y se coloca en una cualquiera de las posiciones. Una vez colocado dicho elemento, la primera operación consiste en elegir a su vecino de la derecha. Esto puede hacerse de $n-1$ formas diferentes. La segunda operación consiste en elegir el que ocupará el segundo puesto a la derecha

del primero. Hay para esto $n-2$ candidatos. El proceso se repite hasta que para la elección del puesto restante sólo queda un candidato posible. Por consiguiente, por el Principio Fundamental, se tiene que el número de órdenes circulares de un conjunto de n elementos es:

$$(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1=(n-1)!$$

1.4 Principio de Adición Dividir y Conquistar

El principio de adición establece que si $A\cap B=\emptyset$, entonces $|A\cup B|=|A|+|B|$. Esto es, si tenemos que contar, un conjunto que resulta difícil de contar basta con partirlo en partes disjuntas y contar las partes. Esta es una estrategia muy antigua conocida como **dividir y conquistar** que no sólo se aplica a problemas de conteo sino a la resolución de problemas en general. La estrategia aplicada a conteo consiste básicamente en dividir el conjunto de configuraciones que se desea contar en dos o más conjuntos disjuntos que sean más fáciles de contar.

Ejemplo 1.8 *¿Cuántas formas hay de escoger 2 números distintos en* $[20]=\{1,2\dots,20\}$ *de tal manera que su suma sea un múltiplo de dos?*

Explicación: Para que la suma de dos números sea múltiplo de 2, los dos números deben ser pares o los dos números deben ser impares. Es claro que estas son las únicas posibilidades y que son disjuntas. Luego, por el principio de adición, basta ver cuántos subconjuntos de dos números pares y cuántos subconjuntos de dos números impares se pueden extraer de [20]. Como en [20] hay diez números pares y diez números impares, de [20] se pueden extraer $\binom{10}{2}=45$ subconjuntos de dos pares y 45 de dos impares. Lo que da un total de 90 formas de escoger 2 números distintos en [20] que su suma sea múltiplo de dos. •

Ejemplo 1.9 *Deduzca una fórmula que cuente el número de formas de colorear los vértices distinguibles de un cuadrado con q colores si se desea que vértices adyacentes tengan colores distintos.*

distinguibles significa que tienen algo que los diferencia de los demás

Explicación: Comencemos por enumerar los vértices del cuadrado, en sentido horario, con los números 1,2,3 y 4. Clasifiquemos los coloramientos deseados en dos tipos disjuntos, a saber: los que tienen los vértices 1 y 3 del mismo color y los que tienen los vértices 1 y 3 de colores distintos. Por el principio de adición, basta contarlos por separado y después sumarlos.

Los vértices 1 y 3 del mismo color: Las operaciones que se realizarán son pintar los vértices 1 y 3 con el mismo color, pintar el vértice 2, y pintar el vértice 4. La primera puedo efectuarla de q formas diferentes, pues dispongo de q colores distintos. Una vez realizada la primera, la segunda puedo hacerla de $q-1$ formas diferentes, y finalmente una vez efectuada la segunda la tercera puedo hacerla de $q-1$ formas diferentes pues 4 debe tener colores diferentes que 1 y 3 que tienen el mismo color. Luego, por el PF hay $q(q-1)^2$ formas de colorear los vértices si los vértices 1 y 3 deben tener el mismo color.

Los vértices 1 y 3 de colores distintos: Las operaciones esta vez son cuatro: pintar 1, pintar 3, pintar 2 y pintar 4. A 1 lo puedo pintar de q formas diferentes, porque dispongo de q colores. Una vez pintado 1, a 3 lo puedo pintar de $q-1$ formas diferentes, porque no puede tener el mismo color que 1. Una vez pintado 3, a 2 lo puedo pintar de $q-2$ formas diferentes, porque no puedo usar los colores usados ni en 1 ni en 3. Finalmente, una vez pintado 2, a 4 lo puedo pintar de $q-2$ formas diferentes, pues no puedo usar los colores de sus vecinos que son 1 y 3 y que tienen colores distintos. Esto hace un total de $q(q-1)(q-2)^2$

Luego, por el principio de adición el número buscado es

$$q(q-1)[(q-1)+(q-2)^2]$$

•

Ejemplo 1.10 *Use el principio de adición para probar que*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Explicación: Por definición, el lado izquierdo cuenta el número de subconjuntos de tamaño k de un conjunto de n elementos. Como uno de tales subconjuntos puede contener o no al $n-$ésimo elemento del conjunto en cuestión, se tiene, en base al principio de adición, que

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \text{no. de } k\text{−subcojuntos que no contienen a } n \\ &+ \text{no. de } k\text{−subcojuntos que contienen a } n \end{aligned}$$

Los que no contienen a n se obtienen tomando los k elementos de los $n-1$ elementos restantes después de extraer al $n-$ésimo y son $\binom{n-1}{k}$. Mientras que **los que contienen a** n se obtienen seleccionando de los primeros

$n-1$ elementos $k-1$ y completando con el $n-$ésimo elemento, y por consiguiente, son $\binom{n-1}{k-1}$. Por lo tanto, se tiene la igualdad deseada.
(Se omitió una biyección que el lector puede completar si lo desea.) •

Un caso particularmente interesante del principio de adición se presenta cuando queremos contar un conjunto difícil de contar que resulta ser el complemento de otro conjunto más fácil de contar. Si además sabemos contar el conjunto universo nuestro problema está resuelto porque dado que $A \cup A^c = U$ y $A \cap A^c = \emptyset$ se tiene por el principio de adición que

$$|A| = |U| - |A^c|$$

Otra forma de expresar este hecho es: si $A \subset B$, entonces $|A| = |B| - |B - A|$, esto es, lo que queremos contar es un subconjunto A de un conjunto B y sabemos contar B y $B - A$.

Por ello, a veces vale la pena preguntarse: ¿no será más fácil contar el complemento? El siguiente ejemplo aclarará lo dicho.

Ejemplo 1.11 *¿Cuántas palabras de cuatro letras en el alfabeto $\Gamma = \{A, B, C, D, E\}$ contienen al menos una E?*

Explicación: Sea P el número de palabras de cuatro letras en Γ y sea P'_E el número de las palabras de cuatro letras en Γ que no contienen la letra E. El número de palabras de cuatro letras en Γ que contienen al menos una vez a la letra E es

$$P - P'_E = 5^4 - 4^4 = 269$$

•

Ejercicio 1.4 *Use un argumento combinatorio para probar que*

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

1.5 Composiciones de un Número

Una composición (fuerte) de un número entero positivo n en k partes ($k-$composición de n) es una $k-$tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ de números enteros positivos que suman n, $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n)$
Por ejemplo las 2-composiciones de 3 son:

$1+2$
$2+1$

La pregunta obligada es: ¿Cuántas $k-$composiciones tiene el número n?

Denotemos al número de las $k-$composiciones de n por $C_k(n)$. Note que cada $k-$composición de n se puede representar por una secuencia de n puntos con $k-1$ barras intercaladas, de tal forma que cada barra está entre un par de puntos y hay una barra como máximo entre cada par de puntos. Las $k-1$ barras dividen los n puntos que forman el número n en k partes para formar una $k-$composición de n. La Figura 1.1 muestra algunas de las $3-$composiciones de 6.

q q q | q q | q	$3+2+1$
q q | q q | q q	$2+2+2$
q q | q q q | q	$2+3+1$
q q q q | q | q	$4+1+1$

Figura 1.1: Algunas de las $3-$composiciones de 6

El problema entonces se reduce a elegir $k-1$ huecos (espacios entre dos puntos) de entre los $n-1$ huecos disponibles para poner las $k-1$ barras. Esto es, tomar un subconjunto de tamaño $k-1$ de un conjunto de tamaño $n-1$. Por consiguiente se tiene que

$$C_k(n) = \binom{n-1}{k-1}$$

En el próximo ejercicio se propone otro enfoque para determinar la fórmula anterior

Ejercicio 1.5 *Demuetre que*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \longmapsto \{a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 \ldots + a_{k-1}\}$$

es una biyección entre el conjunto de las $k-$composiciones fuertes de n y el conjunto de los subconjuntos de $[n-1]$ de $k-1$ elementos $\mathcal{P}_{k-1}([n-1])$.

Ejercicio 1.6 *¿Cuántas soluciones en los enteros positivos tiene la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 8$?*

1.6 Composiciones Débiles de un Número

Una composición débil de un número entero positivo n en k partes ($k-$composición débil de n) es una $k-$tupla $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ de números naturales (posiblemente nulos) que suman n, $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n)$
Por ejemplo las 2-composiciones de 3 son:

$$\begin{array}{ll} 0+3, & 3+0 \\ 2+1, & 1+2 \end{array}$$

Para contar el número de $k-$composiciones débiles de n, nótese que la correspondencia:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \longmapsto (a_1 + 1, a_2 + 1, \ldots, a_k + 1)$$

es una biyección entre las $k-$composiciones débiles de n y las $k-$composiciones (fuertes) de $n + k$.

Para verificar que, en efecto, esta es una biyección defino su inversa así:

$$(b_1, b_2, \ldots, b_k) \longmapsto (b_1 - 1, b_2 - 1, \ldots, b_k - 1)$$

Recuérdese que una función f es biyectiva ssi tiene inversa. Luego si representamos al número de $k-$composición débiles de n por $d_k(n)$, se tiene que

ssi ="si y sólo si"

$$d_k(n) = C_k(n+k) = \binom{n+k-1}{k-1}$$

1.7 Disposiciones

Sean N y X conjuntos *finitos* con $|N| = n$ y $|X| = x$. Una **disposición** de los "objetos" de N en las "cajas" de X consiste en distribuir los objetos en las cajas formando pilas en las cajas, de manera que interesa el orden de los objetos en cada caja. Equivalentemente, una disposición de N en X es una función de $N \longrightarrow X$ con un orden lineal en cada fibra.

Ejercicio 1.7 *Se define el factorial ascendente $x^{\overline{n}}$*

$$x^{\overline{n}} = \begin{cases} x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1) & si\ n > 0 \\ 1 & si\ n = 0 \end{cases}$$

Demuestre que el número $x^{\overline{n}}$ cuenta el número de disposiciones de n objetos en x cajas.

Ejercicio 1.8 *(a) ¿De cuántas maneras se pueden izar n banderas distintas en k astas distinguibles? (b) Repetir el problema con la condición de que toda asta debe tener al menos una bandera.*

Ejercicio 1.9 *Demuestre combinatoriamente que*

$$(x+y)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\overline{k}} y^{\overline{n-k}}$$

1.8 Multiconjuntos

Intuitivamente un multiconjunto es un conjunto con *posibles* elementos repetidos. Por ejemplo,

$$M = \{a, a, a, b, b\}_m$$

es un multiconjunto en el cual la a aparece 3 veces y la b aparece 2 veces. Se usa el subíndice m para enfatizar que es un multiconjunto. Al igual que en los conjuntos, no importa el orden en el que se escriben los elementos, por ejemplo, el multiconjunto anterior se pudo haber escrito como $M = \{b, a, a, b, a\}_m$. Lo que realmente importa es cuántas veces aparece cada elemento. A continuación presentamos la definición formal de multiconjuntos.

Dado un conjunto A, un multiconjunto M sobre A es una función $M : A \longrightarrow I\!N$, donde $I\!N = \{0, 1, 2, \cdots\}$ es el conjunto de los números naturales. Para todo $a \in A$, $M(a)$ se denomina multiplicidad de a y expresa cuántas veces aparece a en el multiconjunto.
Por ejemplo, si $A = \{a, b\}$ un multiconjunto M de A es

$$M = \{a, a, a, b, b\}_m.$$

que puede escribirse también como

$$M = a^3 b^2 \quad \text{para resumir} \quad M(a) = 3; \quad M(b) = 2$$

El tamaño de un multiconjunto del conjunto A es $|M| = \sum_{a \in A} M(a)$.
Si A es un conjunto tal que $|A| = n$ y $k \in I\!N$, entonces al conjunto de todos los multiconjuntos de tamaño k del conjunto A lo representaremos por $\left(\!\binom{A}{k}\!\right)$ y a su cardinalidad por $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$, esto es,

$$\left| \left(\!\binom{A}{k}\!\right) \right| = \left(\!\binom{n}{k}\!\right)$$

Dado un conjunto finito $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, un multiconjunto de tamaño k de dicho conjunto es una $n-$tupla $M = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$—el número de imagenes de cada elemento de A—en la cual se cumple que $m_1 + m_2 + \cdots + m_n = k$.

Como los m_i pueden ser nulos podemos afirmar que **dar un multiconjunto de k elementos de un conjunto de n elementos es lo mismo que dar una $n-$composición débil de k**, por lo tanto el número de multiconjunto de tamaño k de un conjunto de n elementos es

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = d_n(k) = \binom{n+k-1}{n-1} = \binom{n+k-1}{k}$$

Para recordar como evaluar,

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{k!} n^{\underline{k}}$$

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \frac{1}{k!} n^{\overline{k}} \ .$$

Ejemplo 1.12 *Se lanzan tres dados indistinguibles. ¿Cuál es el número de combinaciones diferentes que pueden obtenerse?*

Explicación: Cualquiera de los dados muestra un número del 1 al 6, pero pueden dos o incluso los tres mostrar el mismo número. Luego lo que se obtiene es un multiconjunto de 3 elementos tomado de un conjunto de 6 elementos, esto es,

$$\left(\!\!\binom{6}{3}\!\!\right) = \binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = 56$$

•

Ejercicio 1.10 *Dado un alfabeto finito $\Gamma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, asociamos un cierto orden a sus letras por ejemplo $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ y definimos una* **palabra creciente de longitud** *k como una $k-$palabra $x_1x_2\ldots x_k$ en la cual $x_1 \leq x_2 \leq \cdots x_k$.*
Por ejemplo, las palabras crecientes que se pueden formar en el alfabeto $\Gamma = \{a, b, c\}$ son

aaa	*acc*
aab	*bbb*
aac	*bbc*
abb	*bcc*
abc	*ccc*

Demuestre que el número de $k-$palabras crecientes en un alfabeto de n letras es $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$

1.9 Permutaciones de un Multiconjunto

Un orden lineal de un multiconjunto es cada una de las maneras distinguibles de colocar todos los elementos del multiconjunto en una línea recta. También se le denomina permutación de un multiconjunto aunque hay que tener en cuenta que formalmente representan dos conceptos diferentes. Esto se justifica porque existe una biyección entre los órdenes lineales de un multiconjunto y sus permutaciones. (Muéstrela)

Por ejemplo, los órdenes lineales del multiconjunto $M = \{a^3, b^2\}_m$ son:

$$\begin{array}{ll} aaabb & ababa \\ baaab & aabab \\ bbaaa & baaba \\ abbaa & abaab \\ aabba & babaa \end{array}$$

Diez en total, lo cual es bastante menos que el número de órdenes lineales—120— del conjunto de igual cardinalidad. Esto, claro está, se debe a que al intercambiar dos elementos iguales no se produce una configuración diferente.

Para determinar el número de permutaciones u órdenes lineales de un multiconjunto supongamos que $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ y que el multiconjunto es $M = \{a_1^{m_1}, a_2^{m_2}, \ldots, a_k^{m_k}\}$ con $|M| = m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$.

Hallar las permutaciones significa hallar los órdenes lineales sin tomar en cuenta las permutaciones de los elementos indistinguibles

La estrategia consiste en poner etiquetas para distinguir a los elementos iguales y luego eliminar las etiquetas y contar de cuántas maneras se pueden quitar o poner las etiquetas, para saber cuantas etiquetadas corresponden a una no etiquetada.

Para formalizar las cuentas, usar el principio del Pastor para contar las permutaciones del multiconjunto M tomando una sobreyeción entre los órdenes lineales de las etiquetadas y los órdenes lineales de las no etiquetadas.

$$\text{Ord. Lin. Etiquetadas} \rightarrow \text{ Ord. Lin NO Etiq.}$$

Se comcluye que

$$|\text{Ord. Lin. del Multiconjunto }| = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$$

A este número se le representa por

$$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_k} = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$$

y cuenta el número de órdenes lineales de un multiconjunto. Suele llamársele coeficiente multinomial y cuando $k = 2$ coincide con el coficiente binomial.

Ejemplo 1.13 *¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar 2 libros rojos, 2 azules y 3 negros en un estante si los libros del mismo color son indistinguibles?*

Explicación: El multiconjunto es $\{R^2A^2N^3\}_m$ que significa: 2 rojos, 2 azules y 3 negros. Ordenar los libros es ordenar linealmente al multiconjunto y el número de formas de hacer esto es:

$$\binom{7}{2,2,3} = \frac{7!}{2!2!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 2 \cdot 3!} = 210$$

•

Ejemplo 1.14 *En una frutería se preparan 8 tipos de jugos para la venta. (a) ¿De cuántas maneras pueden comprarse 5 jugos? (b) Si se compraron dos de parchita, dos de mandarina y uno de guanábana, ¿de cuántas maneras se pueden repartir entre 5 personas?*

Explicación: (a) Se desea comprar 5 jugos,... todos podría comprarlos del mismo sabor, todos de distinto sabor, dos de un tipo y tres de otro, etc, etc. Lo importante es que puedo repetir sabores y por lo tanto **debo elegir un multiconjunto**. Luego debo elegir un multiconjunto de 5 elementos (los que voy a comprar) de un conjunto de 8 elementos (los tipos de jugos que hay para la venta), esto es:

$$\left(\!\!\binom{8}{5}\!\!\right) = \binom{8+5-1}{5} = \binom{12}{5}$$

(b) Mi multiconjunto es $\{P^2M^2G^1\}_m$ que significa 2 de parchita, 2 de mandarina y 1 de guanabana. Repartir los jugos es como ordenar linealmente al multiconjunto y el número de formas de hacer esto es:

$$\binom{5}{2,2,1} = \frac{5!}{2!2!1!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2} = 30$$

•

Ejercicio 1.11 *¿Cuál es el coeficiente de a^3bc en el desarrollo de $(a + b + c)^5$? Generalice el resultado anterior para obtener una fórmula para el coeficiente de $a_1^{m_1}a_2^{m_2}a_3^{m_3}\cdots a_k^{m_k}$ en el desarrollo de $(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n$.*

1.10 Particiones de un Conjunto

Dado un conjunto A de n elementos, una partición de A es una colección de subconjuntos no vacíos de A disjuntos dos a dos y cuya unión es A. A cada uno de los subconjuntos de la colección se le denomina bloque de la partición.
Por ejemplo si $A = \{a, b, c, d\}$ una partición de A es $ab|c|d$. Se usan barras verticales para separar los bloques de la partición. Se dice que una partición π_1 es más fina que otra π_2, si todo bloque de π_1 está contenido en un bloque de π_2. También se dice que π_1 es un refinamiento de π_2. Las particiones están ordenadas por refinamiento $\preceq$ y forman un reticulado.

El conjunto de las particiones del conjunto A se denota por $\prod(A)$ y su cardinalidad se denota por $B_n = |\prod(A)|$, y en honor al matemático Eric T. Bell se denomina $n-$ésimo número de Bell. Esto es, los números de Bell cuentan el número de particiones de un conjunto de n elementos. Es fácil ver que $B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 2, B_3 = 5, B_4 = 15$. Pero no se conoce una fórmula cerrada para calcular B_n. Más adelante deduciremos la siguiente fórmula recurrente

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

Esta fórmula puede probarse combinatoriamente usando el principio de adición.

$k-$partición de $[n]$

Las particiones de un conjunto de n elementos pueden tener desde 1 hasta n bloques. La partición que tiene un solo elemento en cada bloque es la partición más fina mientras que la que tiene todos los elementos en un solo bloque es la más gruesa (menos fina).

Si una partición de un conjunto de n elementos, como por ejemplo $[n]$, contiene k bloques se denomina una $k-$partición de n y al número de tales particiones de dicho conjunto se le denota por $S_k(n)$. A esta sucesión doblemente indexada de números enteros se denomina **Números de Stirling de Segunda Clase o Especie**. Esto es, los números de Stirling de Segunda Especie cuentan el número de particiones en k bloques de un conjunto de n elementos.

Al igual que para los números de Bell no se conoce una fórmula cerrada para los números de Stirling de segunda clase pero es bueno saber que satisfacen la siguiente recurrencia

$$S_k(n+1) = S_{k-1}(n) + kS_k(n)$$

De las definiciones de números de Bell y de Stirling se deduce que

$$B_n = S_1(n) + S_2(n) + \cdots + S_{n-1}(n) + S_n(n)$$

El lector puede verificar facilmente que:

Ejercicio 1.12 *Para todo* $k, n \in I\!N$ *se tiene que*

$$\begin{array}{ll} \text{(a) } S_1(n) = 1 & \text{(b) } S_n(n) = 1 \\ \text{(c) } S_k(1) = [k = 1] & \text{(d) } S_k(n) = 0 \textit{ si } k > n \\ \text{(e) } S_{n-1}(n) = \binom{n}{2} & \text{(f) } S_2(n) = 2^{n-1} - 1. \end{array}$$

Tipo de una Partición

Dado un conjunto A de n elementos y una partición π de dicho conjunto, el **tipo de la partición** π es una $n-$tupla $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ que indica cuántos bloques de cada tamaño, desde 1 hasta n, tiene la partición. Es claro que $\sum_{i=1}^{n} i\lambda_i = n$. Por ejemplo, $(1, 2, 0, 0, 0)$ es el tipo de una partición de un conjunto de 5 elementos en tres bloques: uno de 1 elemento y dos de 2 elementos; nótese que $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5$. Obsérvese que cuando se especifica el tipo se está automáticamente especificando el número de bloques de la partición pues el mismo es: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Ejemplo 1.15 *¿Cuántas particiones de tipo* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ *tiene un conjunto de* n *elementos?*

Explicación: Un orden lineal dado se puede convertir en una partición del tipo λ colocando separadores de izquierda a derecha: λ_1 separadores que separan los elementos de uno en uno, λ_2 separadores que separan los elementos de dos en dos y así sucesivamente. Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3, \ldots, 8\}$ y $\lambda = (1, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ entonces el orden 12345678 se convierte en la partición $1|23|45|678$ mientras que el orden 12354876 se convierte en la partición $1|23|54|876$ que es la misma partición. Además 14523678 se convierte en $1|45|23|678$ que de nuevo es la misma partición con los bloques permutados. Concluimos que todos los órdenes lineales que se diferencian sólo en el orden de los elementos que caen en un mismo bloque de la partición inducida por este proceso, producen la misma partición. Tambiém los que se diferencian en el orden de los bloques del mismo tamaño producen la misma partición. Luego si denotamos por

$$f : \mathcal{L}(n) \to \prod_{\lambda}(n)$$

a la función descrita se tiene que todas sus fibras tienen cardinalidad

$$k = \prod_{i=1}^{n} (i!)^{\lambda_i} \lambda_i! \qquad \text{(las patas)}$$

El $(i!)^{\lambda_i}$ se debe a todas las permutaciones de los i elementos en cada uno de los λ_i bloques de tamaño i, mientras que el $\lambda_i!$ se debe a la permutación de los λ_i bloques de tamaño i.
Por lo tanto, basados en el principio del pastor, se tiene que el número de particiones de tipo λ es

$$|\prod_{\lambda}(A)| = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} (i!)^{\lambda_i} \lambda_i!}$$

•

Ejercicio 1.13 *Del conjunto de las funciones de* $[k]$ *en* $[n]$ *diga cuántas son:*

(a) sin restricción	(b) inyectivas
(c) sobreyectivas	(d) biyectivas
(e) estrictamente crecientes	(f) crecientes

Para terminar este capítulo presentamos, en la siguiente tabla, un conjunto de fórmulas cerradas que cuentan una serie de configuraciones que aparecen con mucha frecuencia. El lector puede comprobar que estas son sólo algunas de las configuraciones que estas fórmulas cuentan... La misma se presenta como referencia para presentar un repertorio que sirva de punto de partida cuando se necesite resolver algún problema de conteo.

Notación	Concepto:
$n!$	no. de órdenes lineales de un $n-$conjunto
n^k	no. de $k-$palabras de un $n-$alfabeto
$n^{\underline{k}}$	no. de $k-$subconjuntos ordenados de $n-$conjunto
$n^{\overline{k}}$	no. de disposiciones en n cajas de un $k-$conjunto
$\binom{n}{k}$	no. de $k-$subconjuntos de $[n]$
$\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$	no. de $k-$multiconjuntos de un $n-$conjunto
$C_k(n)$	no. de $k-$composiciones de n
$d_k(n)$	no. de $k-$composiciones débiles de n
B_n	no. de particiones de un $n-$conjunto
$S_k(n)$	no. de particiones de un $n-$conjunto en k bloques
$\binom{n}{m_1, m_2, \ldots, m_k}$	permutaciones del multiconjunto $\{a^{m_1}, a^{m_2}, \ldots, a^{m_k}\}$

Es claro que los mismos números se pueden asociar con otros conceptos como: funciones, funciones crecientes, funciones inyectivas, permutaciones, etc.

1.11 Principio del Palomar

Informalmente el **Principio del Palomar** establece que si colocamos $n+1$ palomas en n casillas para palomas, hay forzosamente una casilla con más de una paloma. Otra versión del principio establece que si se colocan n palomas en n casillas, hay una casilla vacía si y sólo si hay una casilla con más de una paloma. Formalmente, el principio establece que: si $|A| > |B|$, entonces no existe función inyectiva de A en B. Este principio es también conocido como *"pigeonholes principle"*.

Un principio estrechamente relacionado con este es el *principio de desigualdad*, el cual establece que: si existe $f : A \to B$ inyectiva, entonces $|A| \leq |B|$, o que: si existe $f : A \to B$ sobreyectiva, entonces $|A| \geq |B|$. Es claro que el principio del palomar es el contrarrecíproco del principio de desigualdad.

Otro principio relacionado y que resulta equivalente al principio del palomar es el **Principio de las Cajas de Dirichlet** que dice: si se colocan

n objetos en m cajas, alguna caja debe contener al menos $\lceil n/m \rceil$ objetos, y alguna caja debe contener a lo sumo $\lfloor n/m \rfloor$.

Una **generalización** inmediata y muy útil del principio del palomar es la siguiente: Si colocamos $pq+1$ o más objetos en p cajas hay una caja con al menos $q+1$ objetos.

El principio del palomar se usa principalmente para acotar lo que se quiere contar y para probar teoremas y resultados que dependan de la diferencia de los tamaños de los conjuntos involucrados. A continuación mostramos algunos usos del mismo.

Ejemplo 1.16 *Si se toman $n+1$ números $\neq$'s de $[2n]$, alguno divide a otro.*

Sea X el conjunto elegido de cardinalidad $n+1$, y sea
$I = \{i \in [2n] : i \text{ impar }\}$. Se define $f : X \to I$ como:

$$f(x) = \text{ máximo impar que divide a } x$$

Claramente f está bien definida y por el Principio del Palomar exiten x_1 y x_2 tales que están en la misma fibra de f, esto es, tienen la misma imagen bajo f. Por lo tanto, si llamo m a dicho máximo, se tiene que $x_1 = m2^k$ y $x_2 = m2^s$. Por consiguiente, si $k > s$, entonces x_2 divide a x_1, y si, por el contrario, $k < s$, entonces x_1 divide a x_2.

Ejercicio 1.14 *Demostrar que en la ciudad de Nueva York hay dos personas con igual cantidad de pelos en la cabeza.*

Ejemplo 1.17 *Si $n \geq pq+1 > 0$, toda secuencia de n enteros contiene una subsecuencia estrictamene creciente de $p+1$ términos o una subsecuencia decreciente de $q+1$ términos.*

Sea $< x_1, x_2, \ldots, x_n >$ una secuencia cualquiera de enteros. Para toda $i \in [n]$, sea ℓ_i^- la longitud de la subsecuencia decreciente más larga con primer término x_i, y sea ℓ_i^+ la longitud de la subsecuencia estrictamente creciente más larga con primer término x_i. Si la proposición es falsa, se tiene que $1 \leq \ell_i^- \leq q$ y $1 \leq \ell_i^+ \leq p$ y por lo tanto $(\ell_i^-, \ell_i^+) \in [q] \times [p]$ y $f(i) = (\ell_i^-, \ell_i^+)$ es una función total de los índices de la secuencia, $[n]$, en $[q] \times [p]$. Además f es inyectiva, pues si $i \neq j$, asumiendo sin pérdida de generalidad que $i < j$ se tiene que si $x_i < x_j$ entonces $\ell_i^+ > \ell_j^+$ lo cual implica que $(\ell_i^-, \ell_i^+) \neq (\ell_j^-, \ell_j^+)$, o que si $x_i \geq x_j$ entonces $\ell_j^- < \ell_i^-$ lo que también implica que $(\ell_i^-, \ell_i^+) \neq (\ell_j^-, \ell_j^+)$. Por lo tanto, por el Principio del Palomar, $n \leq pq$, y como $pq+1 \leq n$, se tiene que $pq+1 \leq n \leq pq$ lo cual es una contradicción que provino de suponer que la secuencia no contenía subsecuencia estrictamente creciente de tamaño $p+1$ ni subsecuencia decreciente de tamaño $q+1$.

La prueba anterior se efectuó por reducción al absurdo. A continuación daremos una prueba constructiva del mismo ejemplo.

Dada una secuencia cualquiera $< x_1, x_2, \ldots, x_n >$ de n enteros, mostraremos que si la misma no tiene una subsecencia estrictamente creciente de longitud $p+1$ entonces tiene una subsecuencia decreciente de longitud $q+1$. Para todo $i \in [n]$, sea ℓ_i la longitud de la subsecuencia estrictamente creciente más larga que comienza en x_i. Por hipótesis, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se tiene que $1 \leq \ell_i \leq p$. Por lo tanto definimos $f : [n] \to [p]$ como

$$f(i) = \ell_i$$

Esto es, a cada elemento de la secuencia, que identificamos con su índice, le asignamos la longitud de la subsecuencia estrictamente creciente más larga cuyo primer término es dicho elemento. Luego por el principio del Palomar concluimos que existen por lo menos $q+1$ subsecuencias con igual longitud. Sea I el conjunto de los índices donde comienzan tales subsecuencias. Reetiquetando estos índices de tal forma que queden ordenados tenemos:

$$i_1 < i_2 < \cdots < i_{q+1}$$

Se tiene que la secuencia $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots x_{i_{q+1}}$ es una secuencia decreciente de longitud $q+1$, debido a que si $x_{i_j} < x_{i_{j+1}}$, dado que a partir de $x_{i_{j+1}}$ hay una secuencia estrictamente creciente de longitud, digamos, k a partir de x_{i_j} habra una secuencia estrictamente creciente de longitud $k+1$; lo cual es una contradicción pues todas las subsecuencias estrictamente crecientes que empiezan en estos términos tienen igual longitud.

1.12 Conteo de Pares

Terminaremos este capítulo presentando una técnica de conteo que se conoce como **conteo de pares**. La misma se usa cuando las configuraciones que se desean contar se pueden asociar con otras conocidas por medios de pares. Se puede enunciar como sigue:

Si $P \subseteq A \times B$ y se definen $P^{(a)} = \{b \in B : (a,b) \in P\}$ y $P_{(b)} = \{a \in A : (a,b) \in P\}$, entonces

$$|P| = \sum_{a \in A} |P^{(a)}| = \sum_{b \in B} |P_{(b)}| \ .$$

Se ilustrará su uso con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.18 *¿Cuál es la cardinalidad de $A \times B$?*

Si se toma $P = A \times B$ sale que $|P| = \sum_{a \in A} |S^{(a)}| = \sum_{a \in A} |B| = |A||B|$.

Ejemplo 1.19 *Hallar una fórmula que relacione el número de caras C que tiene un $n-$gono regular con el número V de vértices del mismo si cada vértice pertenece a k caras.*

Como toda cara de un $n-$gono se puede asociar con los vértices que la delimitan y a su vez todo vértice se puede asociar con las caras que delimita consideraremos el conjunto de pares (vértice, cara), esto es:

$$P = \{(c, v) : c \text{ cara del } n\text{−gono }, v \text{ vértice del } n\text{−gono}\}$$

y contemos a $|P|$ de las dos formas siguientes:
1) Fijo una cara y cuento los vértices que la delimitan. Si llamo $\mathcal{C}$ al conjunto de las caras se tiene que:

$$|P| = \sum_{c \in \mathcal{C}} |P^{(c)}|,$$

y como cada cara está delimitada por n vértices, se tiene que

$$|P| = \sum_{c \in \mathcal{C}} n = n|\mathcal{C}| = nC \ \ .$$

2) Fijo un vértice y cuento las caras de las que forma parte. Si denotamos por $\mathcal{V}$ al conjunto de los vértices se tiene que

$$|P| = \sum_{v \in \mathcal{V}} |P_{(v)}| = \sum_{v \in \mathcal{V}} k = k|\mathcal{V}| = kV,$$

pues cada vértice pertenece a k caras. Concluimos que

$$nC = kV$$

Ejercicio 1.15 *En una reunión hay 32 muchachos. ¿Cuántas chicas hay en la reunión si se sabe que cada muchacho conoce a cinco chicas y cada chica conoce a ocho muchachos?*

Ejercicio 1.16 *En una fiesta hay 88 personas, entre pavos y pavas. Si cada pava bailó con 3 pavos y cada pavo bailó con 5 pavas, ¿cuántos pavos y pavas había en la fiesta?*

1.13 Problemas

1. ¿De cuántas maneras diferentes puede contestarse un examen de n preguntas de escogencia múltiple si cada pregunta tiene m respuestas posibles y pueden dejarse preguntas en blanco?

2. ¿De cuántas formas diferentes pueden seleccionarse tres grupos de dos personas de un grupo de 6 personas?

3. Hay cuatro hombres y seis mujeres. Cada hombre se casa con una de las mujeres. ¿De cuántas maneras puede ocurrir esto?

4. ¿Cuántos subconjuntos de [10] contienen por lo menos un entero impar?

5. ¿Cuántas formas hay de repartir n monedas iguales—por ejemplo: morocotas—entre m personas, si cada persona debe recibir por lo menos una moneda?

6. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden pintar las caras de un cubo con 6 colores si cada cara debe pintarse de un color distinto y dos coloramientos se consideran iguales si uno se obtiene del otro rotando el cubo?

7. Tenemos k postales distintas y queremos enviarlas todas a nuestros n amigos (cada amigo puede recibir cualquier número de postales, incluyendo 0). ¿De cuántas maneras se puede lograr esto? ¿Qué pasa si queremos que cada amigo reciba por lo menos una tarjeta?

8. (a) ¿Cuántas permutaciones de [6] fijan al 1?
   (b) ¿Cuántas permutaciones de [6] tienen exactamente dos ciclos?
   (c) ¿En cuántas permutaciones de [6] $\pi(1) \neq 2$?

9. ¿De cuántas formas se pueden sentar 7 personas en una mesa redonda si dos arreglos se consideran iguales si cada persona tiene los mismos vecinos, no necesariamente del mismo lado?

10. Un grupo de diez personas se divide en cinco grupos de 2 personas cada uno. ¿De cuántas maneras se puede realizar esto?

11. Contar los siguientes conjuntos de funciones:
    (a) $\{f \in [m]^{[n]} : (\forall i, j \in [n])(i < j \Rightarrow f(i) < f(j))\}$
    (b) $\{f \in [m]^{[n]} : (\forall i, j \in [n])(i < j \Rightarrow f(i) \leq f(j))\}$
    (c) $\{f \in [m]^{[n]} : (\forall i, j \in [n])(i < j \Rightarrow f(i) > f(j))\}$

(d) $\{f \in [m]^{[n]} : (\forall i \in [n])(f(i) \geq i)\}$

12. Una heladería vende 10 sabores diferentes de helados. ¿De cuántas maneras diferentes puede un cliente comprar 5 barquillas de un solo sabor, no necesariamente diferentes?

13. Sean $n, k \in I\!N^*$ fijos. ($I\!N^* = I\!N - \{0\}$)

    (a) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto: $\{(A_1, A_2, \ldots, A_k) : (\forall i \in [k])(A_i \subseteq [n]) \& (\forall i \neq j)(A_i \cap A_j = \emptyset)\}$?

    (b) ¿Cuántas matrices de $n \times k$ de ceros y unos tales que la suma de cada fila es ≤ 1 existen?

    (c) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto: $\{(A_1, A_2, \ldots, A_k) : (\forall i \in [k])(A_i \subseteq [n]) \& \bigcap_{i=1}^{k} A_i = \emptyset\}$?

14. ¿Cuántas secuencias $(a_1, a_2, \ldots, a_{12})$ tienen cuatro 0's y ocho 1's y no tienen dos ceros consecutivos?

15. Se desea colorear los vértices distinguibles de un pentágono regular con q colores, ¿de cuántas formas diferentes se puede lograr esto si se quiere que vértices adyacentes tengan distintos colores?

16. En una tienda hay k clases de tarjetas postales. Queremos enviar postales a n amigos. De cuántas formas se puenden enviar si,

    (i) Queremos que cada uno reciba una tarjeta

    (ii) Queremos que cada uno reciba una tarjeta diferente

    (iii) Queremos que cada uno reciba dos tarjetas

    (iv) Queremos que cada uno reciba dos tarjetas diferentes. Pero dos personas diferentes pueden recibir las mismas dos tarjetas.

17. Demuestre combinatoriamente que

    (a) $\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$

    (b) $\left(\!\binom{n}{m}\!\right) = \left(\!\binom{m+1}{n-1}\!\right)$ Sug.: Puntos, rayas y multiconjuntos

18. En el plano $I\!N \times I\!N$, ¿cuántos caminos hay de (0,0) a (m,n) si en cada paso se debe subir una unidad o avanzar hacia la derecha una unidad?

19. (a) ¿Cuántas soluciones en enteros positivos tiene la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$?

(b) ¿Cuántas soluciones en enteros no negativos tiene la ecuación $x_1 + x_2 + \cdots + x_4 = 4$?

20. (a) Sea $f(n, k)$ el número de maneras en que n personas hacen cola frente a las k taquillas de un banco. Por ejemplo, $f(n, 1) = n!$ y $f(1, k) = k$. Encuentre una expresión sencilla explícita para $f(n, k)$.

    (b) Lo mismo que en (a), excepto que ninguna de las k colas puede ser vacía.

21. Un anagrama es una palabra que resulta de la permutación de las letras de una palabra. ¿Cuántos anagramas tiene la palabra MISSISSIPPI?, ¿En cuántos las cuatro S's no están juntas?

22. Dados dos conjuntos finitos A y B, ¿cuál es el número de relaciones binarias de A en B?

23. ¿Cuántas secuencias de ceros y unos hay con m ceros y n unos?

24. ¿Cuánto subconjuntos de tres elementos hay de [300], tales que la suma de sus elementos sea múltiplo de tres?

25. Dado un alfabeto de 28 letras, ¿cuántos subconjuntos de tres letras pueden escogerse si las letras de ningún grupo deben ser consecutivas?

26. Use un argumento combinatorio para probar que $\frac{(2n)!}{2^n}$ y $\frac{(3n)!}{2^n 3^n}$ son números enteros.

27. Pruebe combinatoriamente que $n!^{(n-1)!}$ divide a $(n!)!$.

28. Se desea colocar k bolas en n cajas; diga de cuántas formas diferentes puede hacerse esto si:

    (a) Si las bolas están etiquetadas y las cajas son indistinguibles.
    (b) Si las bolas son distinguibles y las cajas son indistinguibles, pero no se permiten cajas vacías.
    (c) Como en (a) pero en cada caja debe tener máximo una bola.
    (d) Bolas indistinguibles y cajas distinguibles.
    (e) Como en (d) pero cada caja debe tener máximo una bola.
    (f) Como en (d) pero sin cajas vacías.
    (g) Si las bolas son distinguibles y las cajas también.
    (h) Como en (g) pero se coloca máximo una bola por caja.
    (i) Como en (g) pero en cada caja se coloca mínimo una bola.

29. ¿De cuántas formas diferentes se puede cambiar un billete de 100 dólares en billetes de 1, 2, 5, 10, 20, 50 dólares?

30. Calcular mediante un argumento combinatorio el número $a(k,n)$ de $k-$subconjuntos de $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ que no contienen dos elementos consecutivos.

31. Si $x, y, n \in I\!N$, demuestre combinatoriamente que

$$(x+y)^{\underline{n}} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{\underline{i}} y^{\underline{n-i}}$$

32. ¿Cuántas de las secuencias binarias que contienen k ceros y m unos no tienen dos ceros consecutivos?

33. En el desarrollo de $(1 + x^2 + x^5)^{15}$ cuál es el coeficiente de (a) x^{14}, (b) x^{16}

34. Se tienen k libros rojos y m libros negros que deben colocarse en un estante, en línea uno al lado del otro. De cuántas maneras pueden colocarse si

    (a) todos los libros son distintos

    (b) todos los libros son distintos y se quiere que los libros del mismo color queden juntos

    (c) todos los libros son distintos y se quiere que no queden dos libros negros juntos

    (d) los libros rojos son indistinguibles, los negros son distinguibles y se quiere que no queden dos libros negros juntos

    (e) los rojos son indistinguibles, los negros son distintos y no debe haber dos rojos juntos

    (f) los libros de un mismo color son indistinguibles

    (g) todos los libros de un mismo color son indistinguibles pero se quiere que no queden dos rojos juntos

Cuándo hay que apartarse.—Debes apartarte, al menos por cierto tiempo, de lo que quieres conocer y medir. Las altas torres que se elevan por encima de las casas, sólo se distinguen desde fuera de la ciudad.

El viajero y su sombra. Federico Nietzsche.

Capítulo 2

Manipulación de Sumas

El objetivo de este breve capítulo es presentar formalmente las notaciones usuales para representar sumas y productos de subconjuntos de términos de sucesiones. La intención es lograr que el lector puedea elegir la notación que más le convenga en un momento dado para lograr transformar una suma dada en una fórmula cerrada. Se presentan las reglas básicas de manipulación de sumas y ejemplos de aplicación de las mismas.

2.1 Generalidades

Dada una secuencia de números $a_1, a_2, \ldots$, de un anillo $\langle A, +, \cdot \rangle$, con mucha frecuencia estamos interesados en la suma de una parte de ella, como por ejemplo la suma de los n primeros términos de la secuencia. Dicha suma se puede representar por

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \ .$$

Los puntos significan que deben también sumarse todos los términos comprendidos entre a_2 y a_n. Un ejemplo es $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1}$, y significa sumar los n primeros términos de la sucesión $\{2^n\}_{n=0}^{\infty}$.
Otra forma de representar dicha suma es usando la **notación Sigma**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \ .$$

Significa: sumar todos los términos a_i tales que el índice i es un entero entre los límites 1 y n. Por ejemplo $\sum_{i=2}^{20} i2^i$ significa sumar todos los productos de la forma $i2^i$ con i un entero tal que $2 \leq i \leq 20$ y que en notación de puntos sería $2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + 20 \cdot 2^{20}$. Dicha notación fue inventada por el astrónomo y matemático ítalo-francés Joseph Louis Lagrange en 1772 y posteriormente popularizada por el también matemático y físico francés Joseph Fourier en 1820.

La notación $\sum$ con delimitadores se puede generalizar escribiendo una o más condiciones debajo del signo $\sum$ para especificar el conjunto de índices sobre el cual se desea sumar. Ejemplos:

$$\sum_{1 \le i \le n} a_i, \qquad \sum_{i \in I} a_i, \qquad \sum_{\substack{i \le 10 \\ i \text{ impar}}} a_i, \qquad \sum_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le q \\ 1 \le k \le r}} a_{ij} b_{jk} c_{ki} \; .$$

Debe entenderse que cuando haya más de una condición debajo del signo de sumación la suma se hará sobre los índices que satisfagan todas las condiciones especificadas. Esta generalización nos permite indicar sumas en las cuales los índices no son necesariamente enteros y aun siendolo no lo son consecutivos.

Formalmente, la notación anterior es equivalente a la notación

$$\sum_{R(i)} a_i$$

que significa sumar todos los a_i para los cuales i satisface la condición $R(i)$. Se sobreentiende que las sumas a considerar tienen sólo un número finito de términos no nulos y que una suma vacía tiene el valor CERO.

Comentario

La notación con puntos suspensivos tiene la ventaja de mostrar casi todos los términos de la suma—Ud. para cuando se fastidia o se ha convencido de que se entiende.—y por lo tanto uno puede hacerse una idea más clara de lo que se desea sumar y como manipular la suma para lograrlo. Pero, tiene la desventaja de requerir mucho espacio del que a veces no se dispone. A veces conviene expandir la notación sigma a la notación puntos suspensivos para tener una mejor idea de lo que se desea sumar; puede ser particularmente útil cuando se están dando los primeros pasos para realizar cambios de variables.

La notación sigma con delimitadores es más elegante y compacta que las otras dos pero es menos útil que la generalizada, por ejemplo, en el momento de cambiar los límites de una suma.

Supongamos que en la suma $\sum_{2 \le i \le n+1} 2^{i-1}$ o su análoga con delimitadores $\sum_{i=2}^{n+1} 2^{i-1}$ deseamos cambiar i por $j+1$. Mientras, que en el caso generalizado al sustituir nos queda $\sum_{2 \le j+1 \le n+1} 2^{j+1-1} = \sum_{1 \le j \le n} 2^j$ pues restamos en cada lado de la disigualdad. En el otro caso, tenemos que calcular los nuevos límites de sumación. Si somos descuidados y olvidamos cambiar el límite superior nos daría $\sum_{j+1=2}^{n+1} 2^{j+1-1} = \sum_{j=1}^{n+1} 2^j$. Recordando que el límite superior significa $i = n + 1$ se tiene que $j + 1 = n + 1$ y por consiguiente que $j = n$. Por lo tanto la suma queda realmente $\sum_{j=1}^{n} 2^j$. Observe que el cambio resultó un poquito más laborioso y que los riesgos de equivocarse son superiores.

Recomendamos usar la notación Σ con delimitadores sólo para presentar y finalizar un problema porque es más elegante, mientras que recomendamos usar la notación Σ generalizada en todas las partes donde se requiera hacer alguna manipulación.

2.2 Propiedades de las Sumas

Si I es un conjunto finito de índices se tiene que

Asociatividad:

$$\sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i = \sum_{i\in I} a_i + b_i \quad .$$

Conmutatividad:

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{p(i)\in I} a_{p(i)} \quad .$$

Distributividad:

$$\sum_{i\in I} ca_i = c\sum_{i\in I} a_i \quad .$$

La propiedad asociativa nos permite agrupar dos sumas en una sola o partir una suma en otras dos nuevas sumas. La propiedad conmutativa permite alterar el orden en el cual se reliza la suma. Entiendase p como una permutación del conjunto de los índices. La propiedad distributiva nos permite introducir una constante dentro del signo de sumatoria o extraerla del mismo.

Para ilustrar el uso de estas tres propiedades determinaremos el valor de la suma de los primeros términos de una progresión aritmética. Una progresión aritmética es una sucesión de números en la cual cada término, salvo el primero, se obtiene del anterior sumando una cantidad constante que se denomina razón.

Este problema fue resuelto por Gauss en 1786, a la edad de nueve años. Parece ser que su maestro le pidió que sumara todos los numeros del 1 al 60; Gauss tomó su pizarra portátil y escribió el número 1830. El maestro sorprendido de lo rápido que el niño había llegado a la respuesta sin haber hecho aparéntemente ninguna cuenta le preguntó: "¿Cómo lo hiciste"; a lo cual el niño respondió: "Coloqué los números en orden y sumé el primero y el último, la suma dió 61, luego sume el segundo y el penúltimo, la suma volvió a dar 61, repitiendo el proceso conseguí 30 sumas que dan 61, luego la respuesta es 61×30".

Retrasado el chamo...

Ejemplo 2.1 (Suma de los términos de una progresión aritmética) *Determine una fórmula para la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética de razón r.*

Explicación: Sea S_n la suma de los n primeros términos de una progresión aritmética de razón r y sean a_i, con $1 \leq i \leq n$ los términos de la progresión. Queremos hallar una fórmula cerrada para

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad .$$

Sabemos que para todo i se tiene que $a_i = a_1 + (i-1)r$, luego $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_1 + (i-1)r$ y como también $a_i = a_n + (i-n)r$ se tiene que $S_n = \sum_{1\leq i\leq n} a_n + (i-n)r$. En esta última suma se suma $a_1 + a_2 + \cdot + a_n$; si se permuta el orden de los sumandos por $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1$, basados en la propiedad conmutativa, usando la permutación $p(i) = n - i + 1)$ se tiene que $S_n = \sum_{1\leq i\leq n} a_n + (i-n)r = \sum_{1\leq i\leq n} a_n + ((n-i+1)-n)r = \sum_{1\leq i\leq n} a_n - (i-1)r$. Sumando las dos expresiones de S_n y usando la propiedad asociativa y después la propiedad distributiva se tiene

$$\begin{aligned}
S_n + S_n &= \sum_{i=1}^{n} a_1 + (i-1)r + \sum_{1\leq i\leq n} a_n - (i-1)r \\
2S_n &= \sum_{1\leq i\leq n} (a_1 + (i-1)r) + (a_n - (i-1)r) \\
&= \sum_{1\leq i\leq n} a_1 + a_n \qquad \text{prop. distributiva} \\
&= (a_1 + a_n) \sum_{1\leq i\leq n} 1 \\
&= (a_1 + a_n)n \quad .
\end{aligned}$$

De donde se deduce que $S_n = \frac{(a_1+a_n)n}{2}$. •

Ejercicio 2.1 *Use la propiedad distributiva para probar la siguiente generalización de la propiedad distributiva para sumas*

$$(\sum_{R(j)} a_i)(\sum_{C(j)} b_j) = \sum_{R(i)} (\sum_{C(j)} a_i b_j) \quad .$$

Cambio de variables

Dada una suma de la forma $\sum_{R(i)} a_i$

- Uno podría estar interesado en cambiar el nombre de la variable que sirve de índice, esto es, sustituir $\sum_{R(i)} a_i$ por $\sum_{R(k)} a_k$. Por ejemplo, supongamos que deseamos aplicar la propiedad asociativa para compactar la siguiente suma

$$\sum_{1\leq i\leq n} i + \sum_{1\leq j\leq n} j^2 \ .$$

  Si cambiamos en la segunda suma j por i, en base a la propiedad distributiva, se tiene

$$\sum_{1\leq i\leq n} i + \sum_{1\leq j=\leq n} i^2 = \sum_{1\leq i\leq n} (i+i^2) \ .$$

  con lo cual conseguimos nuestro objetivo.

- También se puede permutar el orden de los sumandos usando una permutación p del conjunto de los índices en cuyo caso

$$\sum_{R(i)} a_i = \sum_{R(p(i))} a_{p(i)} \ .$$

  Esta igualdad es cierta debido a la propiedad conmutativa de la adición en todo anillo.

- El caso más interesante de cambio de variables consiste en trasladar el conjunto de índices. Con este cambio se consigue que una suma comience con el valor del índice que nos convenga. El conjunto de los índices se traslada mediante la biyección $t(i) = i + c$ para obtener la fórmula

$$\sum_{R(i)} a_i = \sum_{R(t(i))} a_{t(i)} \ .$$

  Por ejemplo, si queremos que la suma $\sum_{2\leq i\leq n+2} a_i$ comience en $i = 0$ sustituimos i por $i + 2$ y restamos 2 en cada mienbro de la inecuación doble que representa el dominio para obtener

$$\sum_{2\leq i\leq n+2} a_i = \sum_{2\leq i+2\leq n+2} a_{i+2} = \sum_{0\leq i\leq n} a_{i+2} \ .$$

  En la fórmula $t(i) = i + c$, c es un entero que de ser positivo traslada los índices hacia la izquierda y de ser negativo los traslada hacia la derecha. Otras biyecciones que pueden usarse son $t(i) = c - i$.

Manipulación del dominio

En algunas situaciones nos encontramos con la suma de dos sumatorias sobre dos dominios $R(i)$ y $C(i)$, y podría ser conveniente reordenar los dominios con el fin de simplificar dichas sumas, en este sentido es útil la siguiente fórmula que es una versión de un principio conocido como **principio de inclusión y exclusión** y que estudiaremos en detalle en el capítulo 4.

$$\sum_{R(i)} a_i + \sum_{C(i)} a_i = \sum_{R(i)\vee C(i)} a_i + \sum_{R(i)\wedge C(i)} a_i \ .$$

Dos ejemplos de aplicaión de esta fórmula son los siguientes

- *Agregar o separar uno o más términos de una suma*; ejemplo:

$$a_0 + \sum_{1\leq i\leq n} a_i = \sum_{0\leq i\leq n} a_i \ .$$

- *Juntar dos sumas que pueden tener términos comunes*; ejemplo:

$$\sum_{0\leq i\leq m} a_i + \sum_{m\leq i\leq n} a_i = \sum_{0\leq i\leq n} a_i + a_m \quad 0\leq m\leq n \ .$$

Sumas Múltiples

Una suma puede tener más de un índice; puede tener múltiples índices, por ejemplo

$$\sum_{R(i,j)} i2^j$$

es una suma con dos índices y significa sumar todos los productos $i2^j$ tales que el par (i,j) satisfaga la relación $R(i,j)$. Dicha relación podría ser, por ejemplo, $1\leq i,j\leq n$ o $1\leq i\leq j\leq n$.

Cuando se desea resolver una suma con dos índices la suma se suele escribir como una suma de sumas, por ejemplo

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij} = \sum_{a\leq j\leq n}\sum_{1\leq i\leq j} a_{ij}$$

donde el lado derecho es una abreviación de $\sum_{a\leq j\leq n}(\sum_{1\leq i\leq j} a_{ij})$. Esto quiere decir que hay que resolver la suma interna cuyo índice es i y finalmente resolver la suma externa que tiene por índice j. Esto es, se *suma sobre* **i** *con* **j** *fijo y el resultado se suma sobre las* **j**. Se pudo haber elegido sumar primero sobre las j. Esto se discutirá en la siguiente sección.

Intercanbio del Orden de Sumación

Cuando se pretende resolver una suma con dos índices i y j hay dos posibles ordenes de hacer las sumas: sumar sobre i y luego sobre j o sumar sobre j y luego sobre i. Generalmente uno de los dos suele ser más fácil; es por ello que conviene probar cuál de los dos es el más fácil.

Hay básicamente dos casos de intercambio del orden de sumación:

- Si *los dominios de las sumas son independientes uno del otro*, simplemente se intercambian las dos sumas manteniendo sus dominios inalterables.
$$\sum_{R(i)} \sum_{S(j)} a_{ij} = \sum_{S(j)} \sum_{R(i)} a_{ij} \quad .$$
Por ejemplo,
$$\sum_{1 \le i \le 2} \sum_{1 \le j \le 3} a_{ij} = \sum_{1 \le j \le 3} \sum_{1 \le i \le 2} a_{ij} \quad .$$
- Si *el dominio de la suma interna depende del de la externa*, hay que determinar cuáles son los nuevos dominios de la suma
$$\sum_{R(i)} \sum_{S(i,j)} a_{ij} = \sum_{S'(j)} \sum_{R'(i,j)} a_{ij} \quad .$$
Ejemplo: Sumar los elementos a_{ij} tales que $1 \le j \le i \le n$
$$\sum_{1 \le i \le n} \sum_{1 \le j \le i} a_{ij} = \sum_{1 \le j \le n} \sum_{j \le i \le n} a_{ij} \quad .$$
El problema se resuelve representando gráficamente el conjunto de los índices sobre el cual se desea sumar y eligiendo el orden en el que se quiere sumar: primero sobre las i y luego sobre las j o viceversa.

2.3 Manipulación de Sumas

En esta sección se mostrarán varios ejemplos que ilustran las propiedades de las sumas y las técnicas de manipulación presentadas en la sección anterior.

Método de la perturbación

Este método se basa en la operación de separar un término de una suma. Nos permite hallar una fórmula cerrada para algunas sumas. Empezamos denominando la suma que queremos evaluar S_n :

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} a_i \quad .$$

(Nombrar y conquistar.) Luego escribimos S_{n+1} en dos formas diferentes separándole en una el último término y en la otra el primer término. Finalmente, trabajamos en la última suma para expresarla en función de S_n. Si lo logramos, obtenemos una ecuación cuya solución es la suma que buscábamos.

Usaremos este método para hallar la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica.

Ejemplo 2.2 Suma de los términos de una progresión geométrica *Hallar una fórmula cerrada para*

$$S_n = \sum_{0\leq i\leq n} ax^i \quad .$$

Explicación: El paso de nombrar ya está efectuado. Escribiendo S_{n+1} con el último término separado y luego con el primero separado como lo indica el esquema de perturbación se tiene

$$\begin{aligned}
S_n + ax^{n+1} &= ax^0 + \sum_{1\leq i\leq n+1} ax^i \\
&= a + \sum_{1\leq i+1\leq n+1} ax^{i+1} \\
&= a + x\sum_{0\leq i\leq n} ax^i \\
&= a + xS_n
\end{aligned}$$

De donde despejando S_n se tiene

$$S_n = a\frac{1-x^{n+1}}{1-x} \quad .$$

•

Ejercicio 2.2 *Hallar una fórmula cerrada para la siguiente suma*

$$\sum_{0\leq i\leq n} i2^i \quad .$$

Ejemplo 2.3 *Hallar el valor de la suma* $\sum_{i=1}^{n} i^2$.

Explicación: Por el método de la perturbación denotamos $S_n = \sum_{1\le i\le n} i^2$ y escribimos S_{n+1} en función de S_n

$$\begin{aligned}
S_n + (n+1)^2 &= 1 + \sum_{2\le i\le n+1} i^2 \\
&= 1 + \sum_{2\le i+1\le n+1} (i+1)^2 \\
&= 1 + \sum_{1\le i\le n} (i+1)^2 \\
&= 1 + \sum_{1\le i\le n} (i^2 + 2i + 1) \\
&= 1 + \sum_{1\le i\le n} i^2 + \sum_{1\le i\le n} 2i + \sum_{1\le i\le n} 1 \\
&= 1 + S_n + 2 \sum_{1\le i\le n} i + n
\end{aligned}$$

Dado que las S_n se cancelan hemos fracasado en el intento, pero no todo está perdido, pues podemos obtener una fórmula para $\sum_{i=1}^n i$, esto es:

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad .$$

Además esto nos sugiere que si perturbamos la suma de cubos tal vez hallemos una fórmula para la suma de cuadrados. En efecto,

$$\begin{aligned}
S_n + (n+1)^3 &= 1 + \sum_{2\le i\le n+1} i^3 \\
&= 1 + \sum_{2\le i+1\le n+1} (i+1)^3 \\
&= 1 + \sum_{1\le i\le n} (i+1)^3 \\
&= 1 + \sum_{1\le i\le n} (i^3 + 3i^2 + 3i + 1) \\
&= 1 + \sum_{1\le i\le n} i^3 + 3 \sum_{1\le i\le n} i^2 + 3 \sum_{1\le i\le n} i + \sum_{1\le i\le n} 1 \\
&= 1 + S_n + 3 \sum_{1\le i\le n} i^2 + 3 \sum_{1\le i\le n} i + n
\end{aligned}$$

Lo cual nos permite concluir que

$$\sum_{1\le i\le n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad .$$

Otra forma de obtener el valor de $\sum_{i=1}^{n} i^2$ es observar que i^2 es igual a $\underbrace{i+i\cdots+i}_{i \text{ veces}}$. Luego

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \begin{array}{lllll} 1+ & & & & \\ 2+ & 2+ & & & \\ 3+ & 3+ & 3+ & & \\ \vdots & & & & \\ n+ & n+ & n+ & \cdots & n \end{array}$$

En este momento tenemos dos formas de atacar el problema:
La primera es escribir la suma indicada como una suma doble, con lo cual estaríamos haciendo—en algún sentido—un cambio en el orden de sumación. Nos conviene movernos sobre las columnas y sumar los elementos en cada una de ellas, esto es,

Hacerlo en el otro orden nos lleva de vuelta a $\sum_{i=1}^{n} i^2$

$$\sum_{1\le j\le n}\ \sum_{j\le i\le n} i \quad .$$

Manipulando esta suma se tiene que

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \sum_{1\le j\le n}\ \sum_{j\le i\le n} i \\
&= \sum_{1\le j\le n}\ \sum_{j\le k+j\le n} k+j \\
&= \sum_{1\le j\le n}\ \sum_{0\le k\le n-j} k+j \\
&= \sum_{1\le j\le n} \frac{(n-j)(n-j+1)}{2} + j(n-j+1) \\
&= \sum_{1\le j\le n} \frac{(n-j)(n-j+1)+2j(n-j+1)}{2} \\
&= \sum_{1\le j\le n} \frac{(n-j+1)(n-j+2j)}{2} \\
&= \sum_{1\le j\le n} \frac{(n-j+1)(n+j)}{2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{1\le j\le n} \frac{n^2+n-j^2+j}{2} \\
&= \frac{nn(n+1)}{2} - \frac{1}{2}S_n + \frac{n(n+1)}{4}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$\frac{3}{2}S_n = \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{4}$$

y por consiguiente

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ .$$

El segundo enfoque se basa en contar el complemento; para ello completamos el arreglo de números anterior agregando: $n-1$ 1's en la primera fila $n-2$ 2's en la segunda fila y así sucesivamente hasta obtener la siguiente matriz de $n \times n$, en la cual los números agregados están en negrita

$$
\begin{array}{ccccc}
1+ & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{1} \\
2+ & 2+ & \mathbf{2} & \cdots & \mathbf{2} \\
3+ & 3+ & 3+ & & \mathbf{3} \\
\vdots & & & & \\
n+ & n+ & n+ & \cdots & n
\end{array}
$$

En esta matriz cada columna suma $\frac{n(n+1)}{2}$, por lo tanto la suma de todos los elementos de la matriz es $\frac{n^2(n+1)}{2}$. Denotemos la suma de los elementos por encima de la diagonal por S'_n.

Para determinar S'_n nos conviene movernos sobre las columnas y sumar los elementos en cada fila, esto nos da que

$$
\begin{aligned}
S'_n &= \sum_{1\le j\le n-1} \sum_{1\le i\le j} i \\
&= \sum_{1\le j\le n-1} \frac{j(j+1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{1\le j\le n-1} j^2 + \frac{1}{2}\sum_{1\le j\le n-1} j \\
&= \frac{1}{2}\sum_{1\le j\le n} j^2 - \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{2} \\
&= \frac{1}{2}S_n - \frac{n(n+1)}{4}
\end{aligned}
$$

Por consiguiente,

$$S_n = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{1}{2}S_n + \frac{n(n+1)}{4}$$

de donde se deduce que

$$S_n = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6} \quad .$$

•

2.4 Productos

Para abreviar el producto de una parte de los términos de una sucesión usaremos los tipos de notaciones equivalentes al caso de las sumas: la notación de puntos suspensivos $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n$ que indica que se deben multiplicar los primeros n términos de la sucesión $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, la notación Pi con delimitadores y la notación Pi generalizada. Estas dos últimas se muestran a continuación:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i, \qquad \prod_{1\le i\le n} a_i, \qquad \prod_{R(i)} a_i \quad ,$$

y sus significados son análogos a los correspondientes de sumas. Alerta: *un producto vacío se define como la unidad.*

Como en el caso de las sumas son válidas las reglas de cambio de variables, intercambio del orden de multiplicación y manipulación de los dominios.

Producto de Binomios

Ejemplo 2.4 (Producto de Binomios) *Si x y a_i pertenecen a un anillo conmutativo $\langle A, +, \cdot \rangle$ efectúe el siguiente producto*

$$\prod_{k=1}^{n} (x + a_k) \quad .$$

Explicación: Para familiarizarnos con el problema consideremos el caso $n = 2$. Esto es, hallemos $(x+a_1)(x+a_2)$; aplicando la propiedad distributiva se tiene que $(x+a_1)(x+a_2) = x^2+xa_2+a_1x+a_1a_2$; asociando y conmutando y usando la transitividad de la igualdad se tiene que

$$(x + a_1)(x + a_2) = x^2 + (a_1 + a_2)x + a_1a_2 \quad .$$

El lector puede comprobar que si $n = 3$ se tiene

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3) = x^3+(a_1+a_2+a_3)x^2+(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)x+a_1a_2a_3.$$

Se observa en estos dos casos que el resultado es un polinomio de grado n en x: $s_0x^n + s_1x^{n-1} + s_2x^{n-2} + \cdots + s_{n-1}x + s_n$, donde cada s_k es la suma de todos los productos de k factores a_i, $1 \leq i \leq n$. En este momento podríamos conjeturar que

$$\prod_{k=1}^{n}(x+a_k) = s_0x^n + s_1x^{n-1} + s_2x^{n-2} + \cdots + s_{n-1}x + s_n$$

donde cada s_k es la suma de todos los productos de k factores a_i, $1 \leq i \leq n$. Para probar dicha conjetura expresamos la notación$-\prod$ en notación de puntos suspensivos

$$\prod_{k=1}^{n}(x+a_k) = (x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n) \ .$$

Nótese que, en base a la propiedad distributiva, para realizar este producto hay que elegir en cada paréntesis un término y multiplicar los n términos elegidos; si elegimos i x's tenemos, por la conmutatividad, que cualquiera sean los otros términos elegidos dichos produtos tienen como factor a x^i y al producto de los $n-i$ a_k elegidos. Luego, el coeficiente de x^i es

$$\sum_{1\leq k_1<k_2<\cdots<k_{n-i}\leq n} a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_{n-i}} \ .$$

Por consiguiente, el producto es, en efecto, un polinomio de grado n donde cada s_i es la suma anterior. •

En ciertas ocasiones lo que deseamos es efectuar el proceso contrario, esto es, transformar una suma doble de productos en un producto. Los siguientes dos ejercicios permiten ilustrar esta afirmación.

Ejercicio 2.3 *Exprese la siguiente suma como un producto*

$$a + \sum_{i=1}^{k}\frac{a}{b_i} + \sum_{1\leq i<j\leq k}\frac{a}{b_ib_j} + \sum_{1\leq i<j<\ell\leq k}\frac{a}{b_ib_jb_\ell} + \cdots + \frac{a}{b_1b_2\cdots b_k} \ .$$

Ejercicio 2.4 *Exprese la siguiente suma como un producto*

$$a^k + \sum_{i=1}^{k}\frac{a^{k-1}}{b_i} + \sum_{1\leq i<j\leq k}\frac{a^{k-2}}{b_ib_j} + \sum_{1\leq i<j<\ell\leq k}\frac{a^{k-3}}{b_ib_jb_\ell} + \cdots + \frac{1}{b_1b_2\cdots b_k} \ .$$

2.5 Problemas

1. ¿Cuánto vale la suma $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \cdots + \frac{1}{5^n}$?

2. ¿Cuánto vale la suma $\sum_{i=m}^{n} ar^i$ si $0 \leq m \leq n$?

3. Evalúe $\sum_{i=m}^{n} i$ para $0 \leq m \leq n$

4. ¿Cuál es el valor de $\sum_{m \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})$?

5. Use el método de las perturbaciones para hallar $\sum_{i=0}^{n} i$, $\sum_{i=0}^{n} i^2$ y $\sum_{i=0}^{n} i^3$.

6. Evalúe $\sum_{m \leq i \leq n} \sum_{r \leq j \leq s} ij$. Puede usar algún resultado obtenido previamente.

7. Halle el valor de $\sum_{i=1}^{n} i2^i$

   (a) Por el método de la perturbación

   (b) Escribiendo la suma como una suma doble y cambiando el orden de sumación

8. Probar que si $x \neq 1$ entonces

$$\sum_{i=1}^{n} ix^i = \frac{nx^{n+2} + x - (n+1)x^{n+1}}{(x-1)^2}$$

9. ¿Cuánto vale la suma de los cuadrados de los primero n números impares? Escríbala como una suma doble e invierta el orden de sumación.

10. Evalúe

    (a) $\sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{i(i+1)}$

    (b) $\sum_{m \leq i \leq n} \frac{1}{i(i+1)}$

    (c) $\sum_{m \leq i \leq \infty} \frac{1}{i(i+1)}$

11. Trate de usar el método de perturbación para evaluar $\sum_{1 \leq i \leq n} iH_i$, y concluya que $\sum_{1 \leq i \leq n} H_i = (n+1)H_n - n$. ($H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$)

> *Nefasto.*—Con seguridad se hecha a perder
> a un joven enseñandole a apreciar más al que
> piensa como él que al que piensa lo contrario.
> Aurora, Federico Nietzsche.

Capítulo 3

Binomio y Coeficientes

3.1 Teorema del Binomio

Teorema 3.1 *Si $\langle A, +, \cdot \rangle$ es un anillo conmutativo con identidad, se tiene que para todo $x, y \in A$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que*

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \quad . \tag{3.1}$$

Este teorema puede probarse combinatoriamente de la siguiente manera: El lado izquierdo de la igualdad es el producto de n términos, cada uno de los cuales tiene los mismos dos sumandos:

$$(x+y)^n = \prod_{i=1}^{n} (x+y) = \underbrace{(x+y)(x+y)\cdots(x+y)}_{n \text{ veces}} \quad .$$

Por lo tanto, este producto es igual a la suma de todos los productos que resulten de elegir en cada paréntesis una x o una y, y multiplicar los n símbolos elegidos. Supongamos que elegimos i x's y $n-i$ y's; luego, si asumimos que x y y conmutan, se tiene que el producto de los símbolos elegidos es $x^i y^{n-i}$. Además, como i x's se pueden elegir de $\binom{n}{i}$ formas diferentes de entre los n paréntesis, se tiene que este término aparece en la suma $\binom{n}{i}$ veces. Luego clasificando los sumandos según el número de x's elegidas se tiene, por el principio de adición, que

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i} \quad .$$

Un caso particular que vale la pena mencionar se tiene cuando $y = 1$ obteniéndose

$$(x+1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \tag{3.2}$$

Es importante observar que los coeficientes $\binom{n}{i}$ del desarrollo del binomio son precisamente los números que cuentan el número de $i-$subconjuntos de un conjunto de n elementos. Es por tal razón que a estos números se les suele llamar coeficientes binomiales. Nosotros en ocasiones usaremos este sobrenombre para referirnos a estos números, pero es conveniente no perder de vista qué cosa cuentan.

Del teorema del binomio pueden deducirse relaciones interesantes que involucran a los coeficientes binomiales, por ejemplo, si $x = 1$ se tiene que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Mientras que si $x = -1$ se tiene que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0 \qquad n > 0$$

Ejercicio 3.1 *Demuestre que*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \cdots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots = 2^{n-1} \quad .$$

Más aún, como x es una variable formal, podemos derivar o integrar esta relación para obtener otras relaciones notables entre los coeficientes binomiales, por ejemplo si derivamos (3.2) se obtiene

$$n(x+1)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i x^{i-1}$$

y si a esta ecuación la evaluamos en $x = 2$ se tiene

$$\sum_{i=0}^{n} i 2^{i-1} \binom{n}{i} = n 3^{n-1}$$

Mientras que si integramos (3.2) con respecto a x entre $x = a$ y $x = b$ se tiene que

$$\int_a^b (x+1)^n dx = \int_a^b \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i dx$$

$$\left.\frac{(x+1)^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left.\frac{x^{i+1}}{i+1}\right|_a^b$$

y si elegimos, por ejemplo, $a = 0$ y $b = 2$ se tiene que

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{2^{i+1}}{i+1} = \frac{3^{n+1}-1}{n+1} \quad .$$

Ejercicio 3.2 *Halle el valor de las siguientes sumas*
(a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{k+1}(k+1)}$,
(b) $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k-1}}$.

3.2 Coeficientes Binomiales

A continuación mostraremos una serie de fórmulas importantes que involucran a los coeficientes binomiales y que vale la pena tener a la mano cuando tenemos que manipular expresiones en las que aparezcan los coeficientes binomiales.

Proposición 3.2 *Los coeficientes binomiales satisfacen las siguientes propiedades*

(i) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

(ii) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(iii) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Prueba: (i) Hay un único subconjunto de tamaño 0 de un $n-$conjunto—el conjunto vacío—, y un único subconjunto de n elementos de un $n-$conjunto—el conjunto mismo—.
(ii) Elegir un $k-$subconjunto de un $n-$conjunto puede hacerse de dos formas equivalentes a saber: seleccionar de entre los n elementos del conjunto los k elementos del $k-$subconjunto en cuestión, o elegir de entre los elementos del conjunto los $n-k$ elementos que no deben estar en el subconjunto. Lo primero puede efectuarse de $\binom{n}{k}$ formas mientras que por el segundo camino son $\binom{n}{n-k}$. Luego $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
(iii) Se probó en el ejercicio (1.10) en la página 8. □

Una manera fácil de obtener los valores de los coeficientes binomiales es construir el siguiente arreglo que se conoce como triángulo de Pascal o Tartaglia

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

La propiedad (i) justifica que los términos externos del triángulo sean todos 1's, mientras que la propiedad (iii) es la razón por la cual cada término interno del triángulo se puede obtener sumando sus dos vecinos más cercanos del nivel anterior. La simetría del triángulo se debe a (ii).

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

A continuación presentaremos una serie de igualdades y sumas que involucran a los coeficientes binomales y que nos permitirán aplicar las técnicas adquiridas de manipulación de sumas.

Ejemplo 3.1 *Demuestre combinatoriamente que* $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$

Explicación: Ambos lados de la igualdad pueden verse como el número de maneras de formar dos grupos uno de tamaño k y otro de tamaño $m-k$ de un conjunto de n elementos.

En el primer caso selecciono m de los n disponibles de $\binom{n}{m}$ formas posibles y luego, de esos m, tomo k de $\binom{m}{k}$ formas posibles, dando un total de $\binom{n}{m}\binom{m}{k}$ formas de seleccionar dos grupos, uno de tamaño k y otro de tamaño $m-k$, de un conjunto de n elementos.

En el segundo caso selecciono directamente k de los n disponibles y luego selecciono $m-k$ de los $n-k$ restantes. $\bullet$

Un caso particular inmediato es el siguiente:

Ejercicio 3.3 *Demostrar combinatoriamente que* $\binom{n}{m} = \frac{n}{m}\binom{n-1}{m-1}$.

La fórmula dada en el siguiente ejercicio se conoce con el nombre de convolución de Vandermonde y no es más que una generalización de $\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}$, por lo tanto puede resolverse usando el principio de adición.

Ejercicio 3.4 *Demostrar combinatoriamente la fórmula de convolución de Vandermonde*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{p}{m-k} = \binom{n+p}{m} \ .$$

En forma más general, esta fórmula también puede escribirse como

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{s+k}\binom{p}{m-k} = \binom{n+p}{s+m}$$

Ejemplo 3.2 (Suma Paralela) *Demostrar que*
$\sum_{i=0}^{m}\binom{n+i}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+m}{m} = \binom{n+m+1}{m}$

Explicación: Como $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ se tiene que
$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} = \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} = \binom{n+2}{1}$ y por lo tanto, después de m aplicaciones de $\binom{n+1}{m} = \binom{n}{m} + \binom{n}{m-1}$ se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m}\binom{n+i}{i} &= \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+m}{m} \\
&= \binom{n+2}{1} + \binom{n+2}{2} + \binom{n+3}{3} + \cdots + \binom{n+m}{m} \\
&= \binom{n+3}{2} + \binom{n+3}{3} + \binom{n+4}{4} + \cdots + \binom{n+m}{m} \\
&= \binom{n+m}{m-1} + \binom{n+m}{m} \\
&= \binom{n+m+1}{m}
\end{aligned}$$

Otra forma es...: Como $\binom{n}{m} = \binom{n+1}{m} - \binom{n}{m-1}$ se tiene substituyendo y manipulando la suma que

$$\begin{aligned}
\sum_{0\le i\le m}\binom{n+i}{i} &= \binom{n}{0} + \sum_{1\le i\le m}\binom{n+i}{i} \\
&= \binom{n}{0} + \sum_{1\le i\le m}\left[\binom{n+i+1}{i} - \binom{n+i}{i-1}\right] \\
&= \binom{n}{0} + \sum_{1\le i\le m}\binom{n+i+1}{i} - \sum_{1\le i\le m}\binom{n+i}{i-1} \\
&= \binom{n}{0} + \sum_{2\le j\le m+1}\binom{n+j}{j-1} - \sum_{1\le i\le m}\binom{n+i}{i-1} \\
&= \binom{n}{0} + \sum_{2\le j\le m}\binom{n+j}{j-1} + \binom{n+m+1}{m} - \binom{n+1}{0} - \sum_{2\le i\le m}\binom{n+i}{i-1} \\
&= \binom{n+m+1}{m} \ .
\end{aligned}$$

•

A continuación se muestra una suma que después de ciertos cambios se puede resolver usando la fórmula deducida en el ejercicio anterior.

Ejemplo 3.3 (Suma Superior) *Demostrar que,*

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i}{m} = \binom{0}{m} + \binom{1}{m} + \binom{2}{m} + \cdots + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

Explicación: Nótese que la suma podría empezarse en $i = m$ pues los términos anteriores son todos nulos.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n}\tbinom{i}{m} &= \sum_{0\le m+i\le n}\tbinom{m+i}{m} \\
&= \sum_{-m\le i\le n-m}\tbinom{m+i}{m} \\
&= \sum_{-m\le i\le -1}\tbinom{m+i}{m} + \sum_{0\le i\le n-m}\tbinom{m+i}{m} \\
&= 0 + \sum_{0\le i\le n-m}\tbinom{m+i}{i} \\
&= \tbinom{m+(n-m)+1}{n-m} \\
&= \tbinom{n+1}{m+1}.
\end{aligned}$$

•

Un caso particular importante ocurre cuando $m = 1$ pues se tiene que $\sum_{i=0}^{n} i = \sum_{i=0}^{n}\binom{i}{1} = \binom{n+1}{2}$. Más aún como cualquier potencia i^s se puede expresar en término de $\binom{i}{s}, \binom{i}{s-1}, \ldots, \binom{i}{1}$, usando, por ejemplo, el método de coeficientes indeterminados, podemos obtener a partir de esta expresión el valor de $\sum_{i=0}^{n} i^s$.

Ejemplo 3.4 *Hallar la suma* $\sum_{i=0}^{n} i^2$.

Explicación: Primero expresemos i^2 como combinación lineal de $\binom{i}{1}$ y $\binom{i}{2}$ usando el método de coeficientes indeterminados.

$$\begin{aligned}
i^2 &= a\binom{i}{2} + b\binom{i}{1} \\
&= a\frac{i(i-1)}{2} + bi
\end{aligned}$$

$$= \quad \frac{i(i-1)a+2bi}{2} \quad .$$

Por lo tanto, se tiene que $2i^2 = i(i-1)a + 2bi$; de donde

$$\begin{array}{rll} \text{si } i=1 & 2\cdot 1 = 2b\cdot 1 & \Rightarrow b=1 \\ \text{y si } i=-1 & 2\cdot 1 = 2b\cdot(-1) & \Rightarrow a=2. \end{array}$$

Luego se tiene que $i^2 = 2\binom{i}{2} + \binom{i}{1}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} i^2 &= \sum_{i=1}^{n} (2\binom{i}{2} + \binom{i}{1}) \\ &= 2\sum_{i=1}^{n} \binom{i}{2} + \sum_{i=1}^{n} \binom{i}{1} \\ &= 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\ &= = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6} \end{aligned}$$

•

Ejercicio 3.5 *Usar la fórmula de sumas superiores para evaluar* $\sum_{i=1}^{n} i^3$ *y* $\sum_{i=1}^{n} i^4$.

3.3 Generalizaciones

Con el fin de generalizar el teorema del binomio a casos donde el exponente no sea un número natural, el mismo puede escribirse como

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad (3.3)$$

Incluso conviene escribirla como

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^{\underline{k}}}{k!} x^k$$

Nótese que la serie de la derecha termina después de $n+1$ términos si n es un número entero positivo, pero continúa indefinidamente si n es un entero negativo.

Si en la fórmula (3.3) substituimos n por $-n$ se tiene que

$$\begin{aligned}(1+x)^{-n} &= 1 - nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^{\overline{k}}}{k!}(-1)^k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)(-1)^k x^k \qquad (3.4)\end{aligned}$$

Esto puede verse como una generalización del coeficiente binomial $\binom{n}{k}$, permitiendo que n sea negativo. En este sentido, suele usarse la siguiente notación

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \quad n \in I\!N \ .$$

¿Qué cosas interesantes se le ocurren al particular? Por qué los multiconjuntos? ¿Podría dar una prueba combinatoria de (3.4)? Recuerde que $(1+x)^{-n} = \frac{1}{(1+x)^n} = \cdots$.

Ejercicio 3.6 *Si n es un número natural demuestre combinatoriamente que*

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)(-1)^k x^k \ .$$

Más aún, el teorema sigue siendo válido si n es un número real. En particular, si $n = \frac{1}{2}$ se tiene que

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Otra generalización importante del teorema del binomio se tiene cuando queremos una fórmula para la $n-$ésima potencia de una suma de más de dos términos. En dicho caso se tiene que

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_k=n} \binom{n}{i_1, i_2, \ldots, i_k} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_k^{i_k}$$

Note que la suma es sobre las composiciones débiles de n en k partes.

A esta fórmula puede denominársele teorema multinomial por ser la fórmula de las potencias de un multinomio y a los coeficientes se les conoce como coeficientes multinomiales—recuerde que estos coeficientes cuentan el número de formas de partir un conjunto de n elementos en k grupos <u>ordenados</u> de tamaños $i_1, i_2, \ldots, i_k$—

Es fácil ver que

$$\binom{n}{i_1, i_2, \ldots, i_k} = \binom{n}{i_1}\binom{n-i_1}{i_2}\binom{n-i_1-i_2}{i_3}\cdots\binom{n-i_1-\cdots-i_{k-1}}{i_k}$$

3.4 Problemas

1. Demuestre que $\binom{n}{k} = \frac{n}{n-k}\binom{n-1}{k}$
2. ¿Cuánto da la suma $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}k$?
3. Hallar una fórmula cerrada para $\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\binom{m}{k}k$
4. Demostrar que $\binom{n}{m}^2 > \binom{n}{m-1}\binom{n}{m+1}$ para todo $n \geq m$.
5. (a) Muestre que $\binom{m}{k+1} + \sum_{i=0}^{n-1}\binom{m+i}{k} = \binom{m+n}{k+1}$
   (b) Muestre que $\sum_{i=0}^{n-1}\binom{i+2}{2} = \binom{n+2}{3}$ y concluya que
   $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \cdots + n \times (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$
6. Demostrar combinatoriamente que
   $\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \cdots + \binom{n-1}{p} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.
   Sugerencia: Clasifique los subconjuntos de $[n+1]$ según su elemento máximo.
7. Demostrar que si $n \geq m \geq k \geq r \geq 0$ se tiene que
$$\binom{n}{m}\binom{m}{k}\binom{k}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}\binom{n-k}{m-k}$$
8. Use el teorema del binomio para evaluar
   (a) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$
   (b) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k-1}k\binom{n}{k}$
   (c) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$
9. Escriba i^2, i^3 y i^4 en función de $\binom{i}{1}$, $\binom{i}{2}$ $\binom{i}{3}$ y $\binom{i}{4}$ para hallar $\sum_{i=0}^{n} i^2$, $\sum_{i=0}^{n} i^3$ y $\sum_{i=0}^{n} i^4$.
10. Manipule adecuadamente el lado izquierdo para probar que
$$\sum_{0\leq k\leq n}(-1)^k\binom{m}{k} = (-1)^n\binom{m-1}{n} \qquad \forall m \geq n \geq 0.$$
11. Use el teorema del binomio para calcular 101^3, 11^4, 99^2
12. Evalúe la siguiente suma
$$\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

13. Demuestre que

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2$$

(a) Usando la identidad $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ y considerando el coeficiente de x^n en ambos lados. (b) Aplicando el principio de adición después de reescribir la suma.

14. Obtenga una fórmula cerrada para

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 \binom{n}{i}$$

15. Dé otra prueba de la identidad

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+m}{m} = \binom{n+m+1}{m} \ .$$

Sug.: Clasifique subconjuntos adecuados de $[n+m+1]$ según su máximo

16. Escriba los primeros términos de $(1-x)^{-1/2}$ y demuestre que el coeficiente de x^k es $\frac{1}{4^k}\binom{2k}{k}$.

17. Use la identidad $(1-x)^{-1} = (1-x)^{-1/2}(1-x)^{-1/2}$ para demostrar que

$$\binom{2k}{k} + \binom{2k-2}{k-1}\binom{2}{1} + \binom{2k-4}{k-2}\binom{4}{2} + \cdots + \binom{2k}{k} = 4^k \ .$$

18. Si n es un número natural, demuestre combinatoriamente que

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\!\binom{n}{k}\!\right) (-1)^k x^k \qquad n \in I\!N \ .$$

19. Demuestre que

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} \qquad k > 0 \ .$$

Observe que ésta es una fórmula que permite hallar todos los elementos de una fila del triángulo de Pascal sin haber hallado los de las filas anteriores. Halle por ejemplo los elementos de la sexta fila del triángulo.

Hacia la luz.—Los hombres se empujan hacia la luz,
no para ver mejor, sino para brillar mejor.
Se considera gustosamente como una luz
aquel ante quien se brilla.
El viajero y su sombra, Federico Nietzsche.

Capítulo 4

Principio de Inclusión y Exclusión

4.1 Introducción

El ejemplo obligado para presentar este principio consiste en contar los elementos de la unión de dos o más conjuntos. Dados dos conjuntos A y B para contar los elementos de su unión contamos los elementos de cada uno y le restamos los que están en ambos, pues a éstos los contamos dos veces. Esto se expresa por

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{4.1}$$

Para contar los elementos de la unión de tres conjuntos sumamos las cardinalidades de los tres conjuntos, con lo cual nos excedemos, pues añadimos los elementos que están en las intersecciones de dos conjuntos dos veces y los que están en la intersección de los tres conjuntos tres veces; para corregir este error substraemos la cardinalidad de las intersecciones de cada par de conjuntos, con lo cual resolvemos el problema de los que habíamos metido dos veces, pero los que están en la intersección de los tres conjuntos los hemos substraído tres veces y por lo tanto no los estamos contando. Finalmente, para corregir este error añadimos la cardinalidad de la intersección de los tres conjuntos. Por lo tanto,

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Generalizando, se tiene que si A es un conjunto finito y A_i es una familia de subconjuntos de A indexada por I, entonces

$$|\bigcup_{i\in I} A_i| = \sum_{i\in I} |A_i| - \sum_{\{i,j\}\in I, i\neq j} |A_i \cap A_j| + \sum_{\{i,j,k\}} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots \ .$$

Lo que escrito en forma condensada es

$$|\bigcup_{i\in I} A_i| = \sum_{S\subseteq I} (-1)^{|s|+1} |\bigcap_{i\in S} A_i| \ . \tag{4.2}$$

Esta fórmula puede probarse por inducción sobre el número de conjuntos en la unión. Sin embargo puede probarse combinatoriamente de la siguiente manera. Dado $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$, veremos que la contribución neta de x a la suma es 1. Si definimos $S_x = \{i \in I : x \in A_i\}$, entonces $|S_x| = n$ para algún n. Por lo tanto, el número de los subconjuntos de tamaño k en los que aparece x es $\binom{n}{k}$ implicando que su contribución a la suma es

$$\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \cdots (-1)^{n-1} \binom{n}{n} = 1 \ .$$

Esto sale de considerar en 4.2 todos los subconjuntos de los índices de cada una de las posibles cardinalidades de los conjuntos que contienen a x.

En muchos de los casos lo que deseamos contar es el complemento de $\bigcup_{i\in I} A_i$, esto es $|\overline{\bigcup_{i\in I} A_i}| = |\bigcap_{i\in I} \overline{A_i}|$, que se puede escribir equivalentemente como $|A - \bigcup_{i\in I} A_i|$. Puesto que $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq A$, se tiene que:

$$|A - \bigcup_{i\in I} A_i| = |A| - |\bigcup_{i\in I} A_i| \ .$$

Y por consiguiente

$$|\bigcap_{i\in I} \overline{A_i}| = |A| - \sum_{S\subseteq I} (-1)^{|s|+1} |\bigcap_{i\in S} A_i| \ . \tag{4.3}$$

Ejemplo 4.1 *A un cubo de 10cm. de arista se le pintan todas sus caras y luego se pica en cubitos de 1cm. de arista. ¿Cuántos cubitos no tienen ninguna cara pintada?*

Explicación: Los cubos pintados están en alguna de las caras del cubo. Luego, al número total de cubitos que son 1000 le restamos los que están en cada una de las 6 caras. Con esto nos excedemos, pues los de las aristas están en dos caras y los de los vértices entán en tres de las caras. Para corregir esto le agregamos los que están en cada una de las 8 aristas (intersección de dos caras). Finalmente substraemos los 8 de los vértices (intersección de tres caras) que habían sido restados tres veces y agregados de nuevo tres veces. En total resulta

$$1000 - 6 \times 100 + 12 \times 10 - 8 \times 1 = 512 \ .$$

•

Ejemplo 4.2 (Función φ de Euler)
Sea $\varphi(n)$ el número de enteros menores que n y primos con n. Este número cuenta entre otras cosas el número de generadores de Z_n [1] y las unidades de Z_n.

Explicación: Sea $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ la descomposición de n en primos distintos. Sea A_i el conjunto de los múltiplos de p_i menores o iguales que n. Sale que,

$$|A_i| = \frac{n}{p_i},$$

$$|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_i p_j}, \quad i \neq j \quad \text{etc.}$$

Como lo que queremos es saber ¿cuántos son primos con n? tenemos que hallar la cardinalidad del complemento, esto es, determinar cuántos son divisibles por alguno de los primos que aparecen en la descomposición en primos de n, y restársela al número de enteros positivos $\leq n$.

$$\begin{aligned} \varphi(n) &= |A| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots \\ &= n - \sum_i \frac{n}{p_i} + \sum_{i<j} \frac{n}{p_i p_j} - \sum_{i<j<l} \frac{n}{p_i p_j p_l} + \cdots + (-1)^k \frac{n}{p_1 p_2 \ldots p_k} \end{aligned}$$

Finalmente, se obtiene la siguiente fórmula (Es más fácil ver que el producto da justamente esas sumas)

$$\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \cdots (1 - \frac{1}{p_k})$$

•

[1] Recuerde que $\langle Z_n, +, \cdot \rangle$ es un anillo conmutativo con identidad. Sus generadores son los $a \in Z_n$ tales que $\{n \cdot a : n \in I\!N\} = Z_n$ y sus unidades son los elementos que tienen inverso multiplicativo

4.2 Formulismo del Principio

En muchos de los problemas de teoría combinatoria que nos atañen queremos contar los elementos de subconjuntos que satisfacen o no ciertas propiedades. En dichos casos es posible que podamos emplear el principio de inclusión y exclusión si formulamos el problema adecuadamente. Con el fin de adquirir cierta destreza en la manipulación de este tipo de problemas, presentamos el siguiente formulismo.

Sea A un conjunto finito, que llamaremos **conjunto de referencia**. Consideremos $A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq A$ definidos por las propiedades $p_1, p_2, \ldots, p_k$, esto es, si $x \in A_i$ entonces x satisface la propiedad p_i, lo cual denotaremos como $p_i(x)$. También diremos, $A(p_i) = \{x \in A : p_i(x)\} = A_i$ y manejaremos las intersecciones como $A(p_i p_j) = \{x \in A : p_i(x) \& p_j(x)\}$. Las negaciones las representaremos como $A(p_i^{'}) = \{x \in A : x \text{ no satisface } p_i\}$. Finalmente, denotaremos las cardinalidades por

$$N(p_i) = |A(p_i)| \quad \text{en general} \quad N(...) = |A(...)|$$

A continuación se muestra algunas de las representaciones usuales:

N no. de elementos en A

$N(p_i)$ no. de elementos en A que cumplen con la propiedad p_i

$N(p_i^{'})$ no. de elementos en A que **no** cumplen con la propiedad p_i

$N(p_i p_j)$ no. de elementos en A que cumplen con p_i y p_j

$N(p_i^{'} p_j^{'})$ no. de elementos en A que **no** cumplen con p_i **ni** con p_j

$N(p_i p_j^{'})$ no. de elementos en A que cumplen con la propiedad p_i pero **no** cumplen con la p_j

$N(p_i^{'} p_j^{'} \ldots p_k^{'})$ no. de elementos en A que **no** cumplen con ninguna de las propiedades $p_i, p_2, \ldots p_k$

Objetos que no satisfacen ninguna propiedad

Cómo contar los elementos que no satisfacen ninguna de las propiedades.

$$\begin{aligned} N(p_1^{'} p_2^{'} \ldots p_k^{'}) &= N - \sum_{1 \le i \le k} N(p_i) + \sum_{1 \le i < j \le k} N(p_i p_j) \\ &\quad - \sum_{1 \le i < j < l \le k} N(p_i p_j p_l) + \cdots + (-1)^k N(p_1 p_2 \ldots p_k) \end{aligned} \tag{4.4}$$

Ejemplo 4.3 *Hallar cuántos números enteros positivos menores o iguales que 144 no son divisibles por ninguno de los enteros: 2, 3 y 5.*

Respuesta: Sobre el conjunto [144] se definen las siguientes propiedades:

p_1 : "Es divisible por 2"

p_2 : "Es divisible por 3"

p_3 : "Es divisible por 5"

Para aplicar el principio de inclusión y exclusión tenemos que hallar cuántos enteros positivos menores o iguales que 144 son divisibles por 2, 3, 5, 2 y 3, etc.; para ello observemos que esto es equivalente a determinar cuántos múltiplos menores o iguales que 144 tienen 2, 3, 5, 6, 10, etc.. Además observe que si el cociente $\frac{n}{m}$ es el entero k se tiene que $n = k \cdot m$, lo cual indica que n es el $k-$ésimo múltiplo de m, y que si $\frac{n}{m}$ es un decimal con parte entera k se tiene que n está entre el $k-$ésimo múltiplo de m y el $k+1-$ésimo múltilpo de m, lo cual a su vez indica que hay exactamente k múltiplos de m menores o iguales que n. Luego, el números de múltiplos positivos de m menores que n es igual a la parte entera del número $\frac{n}{m}$. Si denotamos por $\lfloor x \rfloor$ al piso [2] de x, esto es, el mayor entero menor o igual a x, se tiene que

$$
\begin{aligned}
N(p_1) &= \lfloor \frac{144}{2} \rfloor = 72 & N(p_2) &= \lfloor \frac{144}{3} \rfloor = 48 \\
N(p_3) &= \lfloor \frac{144}{5} \rfloor = 28 & N(p_1p_2) &= \lfloor \frac{144}{2 \cdot 3} \rfloor = 24 \\
N(p_1p_3) &= \lfloor \frac{144}{2 \cdot 5} \rfloor = 14 & N(p_2p_3) &= \lfloor \frac{144}{3 \cdot 5} \rfloor = 9 \\
N(p_1p_2p_3) &= \lfloor \frac{144}{2 \cdot 3 \cdot 5} \rfloor = 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
N(p_1^{'}p_2^{'}p_3^{'}) &= N - (N(p_1) + N(p_2) + N(p_3)) \\
&= +(N(p_1p_2) + N(p_1p_3) + N(p_2p_3)) - N(p_1p_2p_3) \\
&= 144 - (72 + 48 + 28) + (24 + 14 + 9) - 4 = 39
\end{aligned}
$$

•

[2] Esta función es más conocida como parte entera de x. También se acostumbra usar la frase "parte entera por arriba de x" para denominar al menor entero mayor o igual que x; sin embargo esta última no dice mucho de la función. Nos parece más claro usar los símbolos $\lfloor x \rfloor$ y $\lceil x \rceil$ y denominarlos **piso de** x y **techo de** x respectivamente

Ejemplo 4.4 (Problema de los Desarreglos–Derangements) *¿Cuántas permutaciones de $[n]$ no tienen punto fijo, esto es, en cuántas permutaciones π de $[n]$ se cumple que para todo $i \in [n]$ $\pi(i) \neq i$? En otras palabras: ¿Si en una reunión n hombres entregan su sombrero al entrar, de cuántas formas pueden retirar sus sombreros al salir de tal forma que ninguno reciba su propio sombrero?*

Respuesta: Tomando como conjunto base las permutaciones del conjunto $[n]$, y como conjunto de propiedades $p_i, \quad i \in [n]$, "i queda fijo" se tiene que queremos $N(p_1^{'}p_2^{'}\cdots p_n^{'})$. Si fijamos uno de los elementos en $[n]$ podemos variar los restantes de $(n-1)!$ maneras, similarmente si fijamos r de los elementos. Por lo tanto, el número de permutaciones que fijan r elementos es $(n-r)!$. Además, como hay $\binom{n}{r}$ maneras de elegir los que se han de fijar se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum N(p_i) &= \binom{n}{1}(n-1)! \\
\sum N(p_ip_j) &= \binom{n}{2}(n-2)! \\
\sum N(p_ip_jp_k) &= \binom{n}{3}(n-3)! \\
&\vdots \\
\sum N(p_1p_2\cdots p_n) &= \binom{n}{n}(n-n)!
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
N(p_1^{'}p_2^{'}\cdots p_n^{'}) &= n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! \\
&\quad - \binom{n}{3}(n-3)! + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)! \\
&= n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right]
\end{aligned}$$

Nótese que la cantidad entre corchetes es una aproximación de e^{-1}, por lo tanto si denotamos por d_n a los desarreglos (derangements) se tiene que

$$d_n \approx n!e^{-1}$$

•

Ejemplo 4.5 *En un campamento se reparten n juguetes diferentes entre n niños. Al día siguiente se vuelven a rapartir los mismos juguetes entres los mismos n niños. ¿De cuántas maneras se pueden repartir los juguetes, los dos días, si ningún niño debe recibir el mismo juguete los dos días?*

Respuesta: Los n juguetes el primer día se pueden repartir de $n!$ maneras diferentes, y el segundo día, sin importar lo que haya pasado el primer día, para que los niños no reciban los mismo juguetes, se pueden repartir de d_n maneras diferentes. Por consiguiente, por el principio fundamental de la teoría combinatoria, los juguetes se pueden repartir de $n!d_n$ maneras. •

Objetos que no cumplen ciertas propiedades pero si las demás

Si queremos determinar cuántos objetos no satisfacen un subconjunto de las propiedades pero si satisfacen el resto de las propiedades la fórmula sigue siendo válida con una pequeña modificación, por ejemplo, si queremos saber cuántos objetos **no satisfacen** las primeras r propiedades pero si satisfacen las restantes $k-r$ propiedades se tiene que:

$$\begin{aligned} N(p_1^{'}p_2^{'}\ldots p_r^{'}p_{r+1}\ldots p_k) &= N(p_{r+1}\ldots p_k) - \sum_{1\leq i\leq r} N(p_i p_{r+1}\ldots p_k) \\ &+ \sum_{1\leq i<j\leq r} N(p_i p_j p_{r+1}\ldots p_k) \\ &- \sum_{1\leq i<j<l\leq r} N(p_i p_j p_l p_{r+1}\ldots p_k) \\ &+ \cdots + (-1)^r N(p_1 p_2\ldots p_r p_{r+1}\ldots p_k) \end{aligned}$$

Ejemplo 4.6 *Hallar cuántos números enteros positivos menores o iguales a 144 no son divisibles por 2 ni por 3, pero si por 5.*

Explicación: Como en el ejercicio anterior sean p_1, p_2, p_3 las propiedades: es divisible por 2, es divisible por 3 y es divisible por 5 respectivamente. Luego, nos piden hallar

$$N(p_1^{'}p_2^{'}p_3) = N(p_3) - (N(p_1p_3) + N(p_2p_3)) + N(p_1p_2p_3) \ .$$

Y usando las cuentas del problema 4.3 de la página 57 se tiene que

$$N(p_1^{'}p_2^{'}p_3) = 28 - (14+9) + 4 = 9 \ .$$

•

Ejemplo 4.7 *Una encuesta realizada en la ciudad de Caracas indica que: al 90 por ciento de la población les gusta al menos uno de los tres productos A, B, C; al 45 por ciento les gusta A, al 28 por ciento les gusta B, y al 46 por ciento les gusta C. Además al 27 por ciento les gusta sólo C y al 6 por ciento les gustan los tres. ¿A qué porcentaje de la población les gustan A y B pero no les gusta C?*

Explicación: Definimos las siguientes propiedades:
p_A : Le gusta A
p_B : Le gusta B
p_C : Le gusta C

A partir de la información dada en el enunciado del problema deducimos que $N(p_A^{'}p_B^{'}p_C^{'}) = 10$, $N(p_A) = 45$, $N(p_B) = 28$, $N(p_C) = 46$, $N(p_A^{'}p_B^{'}p_C) = 27$ y $N(p_Ap_Bp_C) = 6$. Queremos $N(p_Ap_Bp_C^{'})$ que según el principio de inclusión exclusión es

$$N(p_Ap_Bp_C^{'}) = N(p_Ap_B) - N(p_Ap_Bp_C),$$

pero no conocemos $N(p_Ap_B)$. Para obtener $N(p_Ap_B)$ podemos escribir el principio de inclusión y exclusión negando las propiedades así:

$$N(p_Ap_B) = N - N(p_A^{'}) - N(p_B^{'}) + N(p_A^{'}p_B^{'})$$

o despejar $N(p_Ap_B)$ de

$$N(p_A^{'}p_B^{'}) = N - N(p_A) - N(p_B) + N(p_Ap_B) \ .$$

En cualquiera de los dos casos se requiere determinar $N(p_A^{'}p_B^{'})$, que puede obtenerse recordando que los objetos que no satisfacen p_A ni p_B se pueden dividir disjuntamente en los que satisfacen p_C y los que no satisfacen p_C, por consiguiente:

$$N(p_A^{'}p_B^{'}) = N(p_A^{'}p_B^{'}p_C^{'}) + N(p_A^{'}p_B^{'}p_C),$$

o tomando como base para aplicar el principio a $p_A^{'}p_B^{'}$, lo cual daría el mismo resultado:

$$N(p_A^{'}p_B^{'}p_C^{'}) = N(p_A^{'}p_B^{'}) - N(p_A^{'}p_B^{'}p_C) \ .$$

Tenemos entonces que $N(p_A^{'}p_B^{'}) = 27 + 10 = 37$.
Luego tenemos que

$$N(p_Ap_B) \quad = \quad -N + N(p_A) + N(p_B) + N(p_A^{'}p_B^{'})$$

$$= \quad -100 + 45 + 28 + 37 = 10,$$

y finalmente se tiene que

$$\begin{aligned} N(p_A p_B p_C^{'}) &= N(p_A p_B) - N(p_A p_B p_C) \\ &= 10 - 6 = 4 \ . \end{aligned}$$

•

4.3 Una Generalización

Objetos que satisfacen exactamente r propiedades

Nuestro interés es hallar una fórmula más general con la que podamos contar el número de objetos que poseen exactamente r de las k propiedades ($0 \le r \le k$); para ello introduciremos la siguiente notación:

$$\begin{array}{ll} s_0 & N \\ s_1 & N(p_1) + N(p_2) + \cdots + N(p_k) \\ s_2 & N(p_1 p_2) + N(p_1 p_3) + \cdots + N(p_{k-1} p_k) \\ & \\ \vdots & \vdots \\ s_k & N(p_1 p_2 \cdots p_k) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} e_0 & N(p_1^{'} p_2^{'} \cdots p_k^{'}) \\ e_1 & N(p_1 p_2^{'} \cdots p_k^{'}) + N(p_1^{'} p_2 p_3^{'} \cdots p_k^{'}) + \cdots + N(p_1^{'} p_2^{'} \cdots p_{k-1}^{'} p_k) \\ e_2 & N(p_1 p_2 p_3^{'} \cdots p_k^{'}) + N(p_1 p_2^{'} p_3 p_4^{'} \cdots p_k^{'}) + \cdots + N(p_1^{'} p_2^{'} \cdots p_{k-2}^{'} p_{k-1} p_k) \\ & \\ \vdots & \vdots \\ e_k & N(p_1 p_2 \cdots p_k) \ . \end{array}$$

En esta notación e_r representa el número de objetos que satisfacen exactamente r de las k propiedades dadas y s_r representa el número de cumplen por lo menos r de las propiedades.

Teorema 4.1 *El número de objetos que satisfacen exactamente r (r= 0,1,...,k) de las k propiedades dadas es*

$$e_r = s_r - \binom{r+1}{1} s_{r+1} + \binom{r+2}{2} s_{r+2} + \cdots (-1)^{k-r} \binom{k}{k-r} s_k \qquad (4.5)$$

Prueba: Veremos que la contribución a la suma derecha de los objetos con exactamente r propiedades es 1, mientras que la contribución de los demás es cero. Los objetos en s_i satisfacen por lo menos i propiedades, por lo tanto la suma no considera a los objetos con menos de r propiedades. Un objeto que tiene exactamente r de las propiedades se cuenta en la suma una sola vez (en s_r) ya que no es incluido en ninguna de las $s_{r+1}, s_{r+2}, \ldots, s_k$, porque en dichas sumas están los objetos que satisfacen por lo menos $r+1$ propiedades. Si un objeto satisface $r+i$ propiedades $(0 < i \leq k-r)$, entonces aparecerá en s_r tantas veces como subconjuntos de tamaño r se puedan tomar de $r+i$ elementos; esto es, $\binom{r+i}{r}$ veces, y aparecerá en s_{r+s} $\binom{r+i}{r+s}$ veces. Por lo tanto, su contribución neta a la suma será

$$\binom{r+i}{r} - \binom{r+1}{1}\binom{r+i}{r+1} + \binom{r+2}{2}\binom{r+i}{r+2} - \cdots + (-1)^i \binom{r+i}{i}\binom{r+i}{r+i}$$

Pero como

$$\binom{r+s}{s}\binom{r+i}{r+s} = \binom{r+i}{r}\binom{i}{s}$$

se tiene que el lado derecho de 4.5 es, en este caso, igual a

$$\binom{r+i}{r} - \binom{r+i}{r}\binom{i}{1} + \binom{r+i}{r}\binom{i}{2} - \cdots + (-1)^j \binom{r+i}{r}\binom{i}{i}$$

$$= \binom{r+i}{r} \left[\binom{i}{0} - \binom{i}{1} + \binom{i}{2} - \cdots + (-1)^j \binom{i}{i} \right] = 0$$

$\square$

El resultado de este teorema se puede escribir en forma compacta como sigue:

$$e_r = \sum_{i=r}^{k} (-1)^{i-r} \binom{i}{i-r} s_i \qquad (4.6)$$

Ejemplo 4.8 *Encontrar el número de $n-$palabras en el alfabeto $\{0,1,2\}$ que tienen exactamente dos ceros.*

Explicación: Sea p_i la propiedad "el $i-$ésimo dígito de la $n-$palabra es CERO" $(1 \leq i \leq n)$. Según el formalismo queremos e_2, esto es, el número de las secuencias que satisfacen exactamente dos de las n propiedades, esto es

$$e_2 = \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i-2} \binom{i}{i-2} s_i$$

Necesitamos evaluar s_i, que es la suma, sobre todos los $i-$subconjuntos del conjunto de las n propiedades, de los elementos que satisfacen las i propiedades del $i-$subconjunto dado. Como una vez elegido el $i-$subconjuto de las propiedades que se han de cumplir—las i posiciones que seguro son ceros—las restantes $n-i$ posiciones pueden ser *cero, uno o dos* se tiene que hay 3^{n-i} secuencias que satisfacen las i propiedades del $i-$subconjunto dado. Y como este $i-$subconjunto se puede elegir de $\binom{n}{i}$ formas diferentes en total se tiene que $s_i = \binom{n}{i}3^{n-i}$ y por consiguiente

$$e_2 = \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i-2} \binom{i}{i-2} \binom{n}{i} 3^{n-i}$$

Como $\binom{n}{i}\binom{i}{2} = \binom{n}{2}\binom{n-2}{i-2}$ usando simetría, substituyendo, manipulando la suma y usando el teorema del binomio se tiene que

$$\begin{aligned}
e_2 &= \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i-2} \binom{n}{i} \binom{i}{2} 3^{n-i} \\
&= \sum_{2 \leq i \leq n} (-1)^{i-2} \binom{n}{2} \binom{n-2}{i-2} 3^{n-i} \\
&= \binom{n}{2} \sum_{0 \leq j \leq n-2} \binom{n-2}{j} 3^{(n-2)-j} (-1)^j \\
&= \binom{n}{2} (3-1)^{n-2} = \binom{n}{2} 2^{n-2} \quad .
\end{aligned}$$

Otra forma de resolver el problema sin usar el principio de inclusión y exclusión que vale la pena mencionar es:
Como la secuencia debe tener exactamente 2 ceros, elegimos de entre las n posiciones que deben ocupar los números dos de ellas para colocar los dos ceros; esto puede hacerse de $\binom{n}{2}$ formas diferentes. Una vez elegidas estas posiciones, en cada una de las restantes posiciones se puede colocar un 1 o un 2; lo cual se puede hacer de 2^{n-2} maneras diferentes. Luego, por el principio fundamental, hay $\binom{n}{2}2^{n-2}$ secuencias ternarias con exactamente dos ceros. •

Permutaciones con Posiciones Relativas Prohibidas

Ejemplo 4.9 *Halle cuántas permutaciones de las letras* a, b, c, d, e, f, *no tienen el patrón* fea *ni el* bc.

Respuesta: Si sobre el conjunto de las permutaciones de las letras *a, b, c, d, e, f*, tomamos como propiedades:

$$\begin{array}{ll} p_1 & \text{tener el patrón } fea \\ p_2 & \text{tener el patrón } bc \end{array}$$

tenemos que queremos hallar $N(p_1^{'}p_2^{'})$, por lo tanto, por el principio de inclusión y exclusión nos resulta:

$$\begin{aligned} N(p_1^{'}p_2^{'}) &= N - N(p_1) - N(p_2) + N(p_1p_2) \\ &= 6! - 4! - 5! + 3! = 582 \end{aligned}$$

Para calcular $N(p_1)$ se tomó *fea* como una sola letra y se contaron las permutaciones del conjunto $\{fea, b, c, d\}$. De igual forma, se razonó en los restantes casos. ♡

Ejemplo 4.10 *Halle cuántos 3-subconjuntos de un conjunto de n letras no tienen dos letras consecutivas. Saque las cuentas en el caso $n = 28$ y generalice para el caso de k-subconjuntos.*

Respuesta: Tomemos como conjunto base los 3-subconjuntos del conjunto de n letras y como propiedad p_i "El subconjunto contiene las letras i e $i+1$",$1 \leq i \leq n-1$. Tenemos que hallar $N(p_1^{'}p_2^{'}\cdots p_{n-1}^{'})$. Para todo i $N(p_i)$ es el número de subconjuntos de las n letras que contienen la i y la $i+1-$ésima letra, luego el número de tales subconjuntos es $N(p_i) = n-2$, pues hay $n-2$ posibilidades para elegir la letra que falta para completar el $3-$subconjunto. Además, como hay $n-1$ propiedades se tiene que $\sum_{1\leq i\leq n-1} N(p_i) = (n-1)(n-2)$. Por otro lado, $N(p_ip_j) = 1$ si i, j son consecutivos y cero si no lo son, pues de no ser consecutivos tendríamos un 4-subconjunto y no un 3-subconjunto. Finalmente, no hay tres subconjuntos que satisfagan más de dos propiedades, pues tendrían más de tres elementos. Luego, por el principio de inclusión y exclusión se tiene que,

$$\begin{aligned} N(p_1^{'}p_2^{'}\cdots p_{n-1}^{'}) &= N - \sum_{1\leq i\leq n-1} N(p_i) + \sum_{1\leq i<j\leq n-1} N(p_ip_j) \\ &= \binom{n}{3} - (n-1)(n-2) + (n-2) = \binom{n}{3} - (n-2)^2 \end{aligned}$$

Que para el caso $n = 28$ es 2600. La generalización a $k-$subconjuntos se deja como ejercicio. ♡

Ejemplo 4.11 *Se dispone de 2 libros negros, tres rojos y cuatro azules. Los libros de un mismo color son* **indistinguibles**. *¿De cuántas maneras se pueden colocar uno al lado de otro en un estante si se quiere que los libros de igual color no estén formando un solo bloque?*

Respuesta: Sobre el conjunto de las permutaciones de este multiconjunto $N^2R^3A^4$ se definen tres propiedades, a saber: p_1 "Los negros forman un bloque", p_2 "Los rojos forman un bloque" y p_3 "Los azules forman un bloque". Nótese que, si por ejemplo, los negros forman un bloque se tiene que el multiconjunto que hay que permutar es $\mathbf{N}^1R^3A^4$, y por consiguiente se tiene que el número de maneras de colocar los libros de tal forma que los libros de igual color no formen un solo bloque es

$$N(p_1^{'}p_2^{'}p_3^{'}) = \frac{9!}{2!3!4!} - \left(\frac{8!}{1!3!4!} + \frac{7!}{2!1!4!} + \frac{6!}{2!3!1!}\right) + \left(\frac{6!}{4!} + \frac{5!}{3!} + \frac{4!}{2!}\right) - 3!$$

•

Ejemplo 4.12 Matrimonios Liberados (Desarreglados)
¿De cuántas maneras se pueden sentar n matrimonios en una mesa redonda de tal forma que cada hombre tenga dos mujeres a su lado de las cuales ninguna es su esposa?

Respuesta: Enumeremos los matrimonios de 1 a n, y tomemos como conjunto base al conjunto de los ordenamientos circulares de los n hombres y sus n mujeres en los cuales cada hombre tiene a su lado dos mujeres y cada mujer tiene a su lado dos hombres. Tomemos como propiedad p_i: "El hombre i está al lado de su mujer"
$N = (n-1)!n!$: Hay $(n-1)!$ maneras de sentar a los n hombres en una mesa redonda y una vez sentados de cualquiera de estas maneras hay $n!$ formas de sentar a sus mujeres. $N(p_i) = (n-2)!(n-1)!(2n-2)$: sentar a los $n-1$ hombres, sentar a sus mujeres y sentar a la pareja i. Dado $1 \leq k \leq n-1$, si se quiere que k hombres determinados estén junto a sus esposas, sin importar los demás, se tiene que el número de formas de lograrlo es: $(n-k-1)!(n-k)!(2n-2k)^{\overline{k}}$. Finalmente, Hay $2 \cdot (n-1)!$ maneras de sentar a cada hombre al lado de su mujer. Si denotamos por M_n al número de matrimonios desarreglados, se tiene que

$$M_n = (n-1)!n! + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k-1)!(n-k)!(2n-2k)^{\overline{k}} + (-1)^n \cdot 2(n-1)!$$

•

4.4 Problemas

1. Halle cuántas permutaciones de las 26 letras del alfabeto inglés, A, B, C,..., X, Y, Z, no contienen las palabras CAFE, AMOR, MADRE.

2. Sea $\mathcal{L}([n])$ el conjunto de los órdenes lineales del conjunto $[n]$. Sea Q_n el número de tales órdenes en los que ningún $i \in [n-1]$ aparece inmediatamente seguido de $i+1$. Usar el principio de inclusión-exclusión para ver que

$$Q_n = n! + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} (n-k)!$$

3. Pruebe que

$$\binom{n-m}{n-k} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} \binom{n-i}{k} \qquad n \geq k \geq m \ .$$

Sugerencia: Muestre que $\binom{n-m}{n-k}$ es el número de maneras de seleccionar k objetos de un conjunto que contiene n objetos distintos si hay m objetos especiales que deben incluirse en la selección.

4. ¿En cuántas permutaciones de los números 1, 2, 3,...,8 no aparecen los patrones 12, 34, 56, 78?

5. Dos profesores de dos materias diferentes planean tomar un examen oral a 12 estudiantes durante la misma hora. Cada estudiante debe ser examinado individualmente durante cinco minutos en cada materia. ¿De cuántas maneras se puede programar esto de tal forma que un estudiante no tenga que tomar ambos exámenes al mismo tiempo?

6. Los enteros $1, 2, 3, \ldots, n$ se colocan formando una circunferencia. Halle el número de formas en las que pueden arreglarse si dos enteros consecutivos en sentido horario no pueden quedar adyacentes (n y 1 se consideran consecutivos)

7. Probar que el número de grafos simples sin bucles y sin vértices aislados que pueden construirse con n vértices dados es

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{\binom{n-k}{2}}$$

8. Use inclusión-exclusión para ver que $S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}i^n$, donde $S(n,k)$ es un número de Stirling de Segunda Especie.
   Sug.: Cuente $\{f\in[k]^{[n]}: f \text{ sobreyectiva}\}=\mathrm{A}-\cup_{\mathrm{i}\in[\mathrm{k}]}\mathrm{A}_\mathrm{i}$, donde $A=[k]^{[n]}$ y $A_i=\{f\in A: i\notin \mathrm{Im}f\}$

9. Calcular cuántos $m-$subconjuntos de $\{e_1,e_2,e_3,\ldots,e_n\}$ que no contienen dos elementos consecutivos hay.

10. Un salón de clases tiene 2 filas de ocho pupitres cada una. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar 14 estudiantes en los 16 pupitres si hay 5 de ellos que deben sentarse en la primera fila y otros 4 que deben sentarse en la segunda fila?

11. Las veinte letras a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, A, B, C, D, E, F, G, H, I, J se ordenan circularmente. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna letra minúscula quede al lado de su mayúscula correspondiente?

12. Un tren consta de n vagones. Cada uno de los p pasajeros selecciona al azar el vagón en el cual viajará.

    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos un pasajero en cada vagón?

    (b) ¿Cuál es la probabilidad de que haya exactamente k vagones ocupados?

    (c) Use el resultado de la parte (a) para evaluar

$$\binom{n}{1}1^p-\binom{n}{2}2^p+\binom{n}{3}3^p-\cdots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}n^p \quad 1\le p\le n$$

13. Una asamblea de $2n+1$ miembros debe estar compuesta por representantes de tres partidos diferentes. ¿De cuántas formas se pueden repartir los $2n+1$ puestos entre los tres partidos de tal manera que una coalición de dos partidos cualesquiera represente mayoría de votos?

14. Un profesor, ligeramente distraído, escribe n cartas para sus n alumnos y cierra los sobres para enviarlos sin escribirles las direcciones. Como no tiene más sobres—y además es muy flojo— decide escribir las direcciones al azar.

    (a) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos un estudiante reciba la carta que le corresponde?

    (b) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente k estudiantes reciban su carta?

15. Determine cuántas soluciones en los enteros tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + x_3 = 15$$

$$\text{sujeta a } \begin{cases} 1 \leq x_1 \leq 5, \\ 1 \leq x_2 \leq 6, \\ 1 \leq x_3 \leq 8. \end{cases}$$

Sug.: Tome como propiedades: $p_1 : x_1 \geq 6$, $p_2 : x_2 \geq 7$, y $p_3 : x_3 \geq 9$

El más caritativo.—El hombre es más caritativo cuando se le rinde un gran homenaje y cuando ha comido un poco.

El viajero y su sombra, Federico Nietzsche.

Capítulo 5

Recurrencias

Una recurrencia o ecuación en diferencia es una relación entre los términos de una secuencia que permite conocer un término dado en base a alguno(s) de los anteriores. Por lo tanto, para comenzar los cómputos se debe conocer uno o varios números de la secuencia que llamaremos condiciones de borde. En algunos casos estas ecuaciones en diferencias se pueden resolver para hallar una fórmula cerrada para lo que queremos contar. Mostraremos algunos métodos de solución de dichas ecuaciones.

5.1 Planteamiento de Recurrencias

En esta sección se plantearán algunas recurrencias de ciertos problema de conteo que permitirán luego resolver dichos problemas en la sección siguiente. Será particularmente útil el principio de adición.

Ejemplo 5.1 *Halle una recurrencia que cuente el número de secuencias de ceros y unos de longitud* n *que no tienen dos ceros consecutivos.*

Respuesta: Denominemos a_n al número de secuencias deseado. Las secuencias de longitud n se parten disjuntamente en las que terminan en 0 y las que terminan en 1. Por lo tanto para contarlas basta con contar estos dos conjuntos (Principio de adición). Como a las que terminan en 1 se les puede obtener de las de longitud $n-1$ agregándole un 1 al final (hay una biyección, ¿cuál es?) se tiene que de ellas hay a_{n-1}. Mientras que las que terminan en cero, no las podemos hallar a partir de las de longitud $n-1$ agregándole un cero, pues podrían tener dos ceros consecutivos. Sin embargo, se les puede hallar a partir de las de longitud $n-2$ agregándole la secuencia 10. De aquí concluimos que

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Además, $a_0 = 1$ $a_1 = 2$ •

Ejemplo 5.2 *Halle una recurrencia que cuente el número de regiones en que dividen el plano n rectas que se cortan dos a dos y tales que tres de ellas no pasan por un mismo punto.*

Respuesta: Si llamamos a_n al número de tales regiones, se tiene que $a_0 = 1$ pues 0 rectas dividen el plano en una región. Claramente $a_1 = 2$ y $a_2 = 4$. Supongamos que tenemos un plano partido por $n-1$ rectas y que agregamos la $n-$ésima recta. La nueva recta corta a todas las anteriores. Luego al agregar la $n-$ésima recta dicha recta corta a las ya presentes en $n-1$ puntos, por consiguiente queda dividida en n trozos cada uno de los cuales parte una región de las presentes en dos, aumentando de esta forma en n el número de las regiones—una por trozo—. Por lo tanto se tiene que

$$a_n = a_{n-1} + n.$$

•

Ejemplo 5.3 *Halle una fórmula recurrente que permita evaluar el número de maneras en las cuales se puede parentizar binariamente una expresión de n números.*

Respuesta: Denominemos a_n al número de tales parentizaciones binarias de n números. Si se parte la expresión en dos trozos, luego se parentiza cada trozo y finalmente se parentiza los dos trozos se habrá logrado el objetivo. Si el primer trozo tiene i números el mismo se podrá perentizar de a_i maneras y el segundo de a_{n-i} maneras, por lo tanto el número total de maneras en que podrá parentizarse la expresión si el primer trozo tiene i números es $a_i a_{n-i}$. Por consiguiente como el primer trozo puede tener entre 1 y $n-1$ números se tiene que

$$a_n = \sum_{1 \leq i \leq n-1} a_i a_{n-i}$$

•

Ejemplo 5.4 (Torres de Hanoi) *Se disponen* n *anillos de tamaño decreciente en una estaca formando una torre. Estos discos deben transferirse a una segunda estaca de uno en uno usando una tercera estaca donde los discos pueden colocarse temporalmente. Si en ningún momento se puede colocar un disco encima de otro más pequeño que él, ¿en cuántos pasos se puede transferir la torre de una estaca a la otra?*

Respuesta: Denotamos por T_n al menor número de pasos necesarios para transferir los n anillos según las reglas descritas. Para transferir los n anillos a la segunda estaca hay que transferir los primeros $n-1$ anillos a la tercera estaca, lo cual requiere mínimo T_{n-1} pasos, luego transferir el mayor de los anillos a la segunda estaca—un paso más—y finalmente hay que transferir los $n-1$ anillos de la tercera a la segunda estaca en mínimo T_{n-1} pasos. Por consiguiente, el número de pasos necesarios para transferir los n anillos se puede expresar como

$$T_n = 2T_{n-1} + 1$$

•

Ejemplo 5.5 *Halle una ecuación en diferencias que permita evaluar* $\sum_{1\leq i\leq n} i^2$.

Respuesta: Sea $S_n = \sum_{1\leq i\leq n} i^2$. Puesto que $S_n = \sum_{1\leq i\leq n-1} i^2 + n^2$ podemos expresar a S_n como $S_n = S_{n-1} + n^2$. •

Ejemplo 5.6 *Halle una recurrencia que permita contar el número de formas de seleccionar k números de $[n]$ sin que haya dos consecutivos.*

Respuesta: Sea $f(n,k)$ el número de tales subconjutos. Para contar dichos subconjuntos, los mismos se pueden partir disjuntamente en los que no contienen al número n y los que contienen al número n. Los que **no contienen** al número n son $f(n-1,k)$ porque simplemente es tomar k números de entre $n-1$ con la restricción establecida. Mientras que los que contienen el número n son tantos como las formas de seleccionar $k-1$ números de $[n-2]$ sin que haya dos consecutivos pues las deseadas se obtienen de estas agregándole el número n. Tomamos los $k-1$ números de $[n-2]$ porque hay que excluir el $n-1$ dado que el subconjunto deseado debe contener al n. Por lo tanto, por el principio de adición, se tiene que

$$f(n,k) = f(n-1,k) + f(n-2,k-1)$$

•

Ejemplo 5.7 *Halle una recurrencia para el número de particiones de un $n-$conjunto.*

Respuesta: Sea Π_n el número de particiones de un $n-$conjunto. Sea x_1 el primer elemento de dicho conjunto. Para contar dichas particiones clasifiquémoslas dependiendo del número de elementos en el bloque de x_1. Si el bloque que contiene a x_1 tiene i elementos incluido x_1 los restantes $n-i$ elementos pueden formar Π_{n-i} particiones diferentes de $n-i$ elementos, y como los elementos que aconpañan a x_1 en su bloque se pueden elegir de $\binom{n-1}{i-1}$ formas diferentes se tiene que hay $\binom{n-1}{i-1}\Pi_{n-i}$ particiones que contienen a x_1 en un bloque de i elementos. Por lo tanto, sumando sobre todos los posibles valores de i se tiene que

$$\Pi_n = \sum_{1\le i\le n} \binom{n-1}{i-1}\Pi_{n-i} = \sum_{1\le i\le n} \binom{n-1}{n-i}\Pi_{n-i} = \sum_{0\le i\le n-1} \binom{n-1}{i}\Pi_i$$

•

Ejercicio 5.1 *Encuentre una recurrencia que permita contar el número de particiones de un $n-$conjunto en k bloques.*

Ejercicio 5.2 *Hallar una ecuación en diferencias para contar el número de particiones de un número natural n en k partes.*

Ejemplo 5.8 *¿Cuántos árboles binarios enraizados de n nodos hay?*

Explicación: Denotemos por a_n al número de árboles binarios enraizados de n nodos. Uno de tales árboles tiene un nodo que es la raíz, un subárbol derecho y un subárbol izquierdo. Dichos subárboles pueden tener de cero a $n-1$ nodos. Clasificamos los subárboles de n nodos según la cardinalidad del subárbol derecho. Si, por ejemplo, el subárbol derecho tiene i nodos, el izquierdo tendrá $n-i-1$ nodos, y como hay a_i árboles con i nodos y a_{n-i-1} árboles con $n-i-1$ nodos se tiene con base en el principio fundamental que hay $a_i a_{n-i-1}$ árboles con i nodos en el subárbol derecho. Por consigiente, por el principio de adición el número de árboles binarios enraizados está dado por la siguiente recurrencia

$$a_n = \sum_{0\le i\le n-1} a_i a_{n-i-1} \quad \text{si } n \ge 1$$

•

Ejemplo 5.9 *Para todo $n \ge 1$ se define el determinante D_n, de $n \times n$ como*

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c & c & c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$$

Hállese una recurrencia para D_n y resuélvala.

Explicación: Recuerde para resolver el determinante D de la matriz A de $n \times n$ por una de sus líneas (fila o columna) se suman los productos $a_{ij}(-1)^{i+j}D_{ij}$. Por ejemplo si se quiere resolver por la $j-$ésima columna el resultado es $D = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}D_{ij}$, donde a_{ij} es el elemento de la matriz A que se encuentra en la $i-$ésima fila y en la $j-$ésima columna y D_{ij} es el determinante que resulta de borrar la $i-$ésima fila y la $j-$ésima columna.

Si resolvemos el determinante por por la primera columna nos queda que

$$D_n = aD_{n-1} + (-1)^{n+1}c \begin{vmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a & b \end{vmatrix}$$

y como este nuevo determinante de $n-1 \times n-1$ es triangular inferior su valor es el producto de la diagonal principal que es b^{n-1}, luego se tiene que $D_n = aD_{n-1} + (-1)^{n-1}cb^{n-1} \quad n \leq 2$. Por otro lado $D_1 = |a| = a$ y $D_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ c & a \end{vmatrix} = a^2 - bc$. El lector puede chequear que $D_3 = \begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ c & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^2c - abc$ y que se cumple la recurrencia. La solución de la misma se deja como ejercicio para la próxima sección. •

5.2 Resolución de Recurrencias

5.2.1 Método de sumas

Si la ecuación es de la forma

$$x_n = x_{n-1} + c_n, \tag{5.1}$$

podemos expresar cada término en base al anterior como sigue

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_0 + c_1 \\
x_2 &= x_1 + c_2 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
x_{n-1} &= x_{n-2} + c_{n-1} \\
x_n &= x_{n-1} + c_n
\end{aligned}$$

y luego sumar estas ecuaciones separando x_n y x_0 para obtener

$$x_n = x_0 + \sum_{1 \leq i \leq n} c_i \tag{5.2}$$

El éxito en la aplicación de este método radica exclusivamente en nuestra habilidad para resolver la suma resultante. Su aplicación, aparentemente limitada a ecuaciones de la forma 5.1, se puede ampliar a otros tipos de ecuaciones que después de una transformación adecuada se reduzcan 5.1. Ejemplo de ello son las ecuaciones en diferencia lineales de primer orden que se estudian a continuación del próximo ejemplo.

Ejemplo 5.10 *Resolver* $a_n = a_{n-1} + n$ *con* $a_0 = 1$

Respuesta: Según 5.2 se tiene

$$\begin{aligned}
a_n &= a_0 + \sum_{1 \leq i \leq n} i \\
&= 1 + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n^2 + n + 2}{2}
\end{aligned}$$

•

5.2.2 Ecuación en diferencia lineal de 1^{er} orden

Dada la ecuación

$$a_n x_n = b_n x_{n-1} + c_n \tag{5.3}$$

Para resolverla la multiplicaremos por un factor de sumación s_n elegido convenientemente de tal forma que la recurrencia se reduzca prácticamente a una suma, esto es,

$$s_n a_n x_n = s_n b_n x_{n-1} + s_n c_n \tag{5.4}$$

Dicho factor debe ser tal que

$$s_n b_n = s_{n-1} a_{n-1}$$

Porque de esta forma 5.4 se transforma en

$$s_n a_n x_n = s_{n-1} a_{n-1} x_{n-1} + s_n c_n$$

Si definimos $S_n = s_n a_n x_n$ y la sustituimos en esta ecuación se tiene

$$S_n = S_{n-1} + s_n c_n$$

ecuación cuya solución es

$$S_n = s_0 a_0 x_0 + \sum_{i=1}^{n} s_i c_i = s_1 b_1 x_0 + \sum_{i=1}^{n} s_i c_i$$

La solución de la ecuación original es por consiguiente

$$x_n = \frac{1}{s_n a_n} \left(s_1 b_1 x_0 + \sum_{i=1}^{n} s_i c_i \right) \quad . \tag{5.5}$$

Falta precisar el factor de sumación s_n. Podría pensarse que hay que estar iluminado para que se le ocurra a uno cual es el factor adecuado. Sin embargo, el mismo se puede deducir despejando s_n en $s_n b_n = s_{n-1} a_{n-1}$ y desarrollando el lado derecho, esto es,

$$s_n = s_{n-1} \frac{a_{n-1}}{b_n} = s_{n-2} \frac{a_{n-1}}{b_n} \frac{a_{n-2}}{b_{n-1}} = \cdots = s_0 \frac{\prod_{i=0}^{n-1} a_i}{\prod_{i=1}^{n} b_i} \tag{5.6}$$

Nota: Realmente la recurrencia de s_n se desarrolla hasta un valor conveniente. Por ejemplo, si $a_0 = 0$ no conviene desarrollarla hasta tenerla en base a s_0 sino hasta s_1. Además, el primer término de s_n ya sea s_0, s_1 o cualquier otro se puede tomar como 1. ¿Por qué?

De todo lo cual concluimos que para resolver la ecuación lineal de primer orden dada por 5.4 podría adoptarse como método: hallar el factor sumante s_n, hallar el valor de la suma $\sum s_n c_n$ y aplicar 5.5. Sin embargo, es conveniente que el estudiante repita todo el proceso para que fije y termine de entender el método usado. Veremos una aplicación de esta ecuación resolviendo la recurrencia obtenida para el problema de las Torres de Hanoi.

Ejemplo 5.11 *Resuelva la recurrencia $x_n = 2x_{n-1} + 1$ con $x_0 = 0$.*

Respuesta: Según la fórmula (5.3) $a_i = c_i = 1 \forall i$ y $b_i = 2 \forall i$. Por consiguiente $s_i = \frac{1}{2^i}$. Multiplicando ambos lados de la ecuación por dicho factor se tiene

$$\frac{x_n}{2^n} = \frac{x_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n}$$

Si denotamos $y_n = \frac{x_n}{2^n}$ se tiene que la ecuación se tranforma en

$$y_n = y_{n-1} + \frac{1}{2^n}$$

y puesto que $y_0 = s_0 a_0 x_0 = 1 \times 1 \times 0 = 0$, usando 5.2 obtenemos

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2^n - 1}{2^n}$$

y finalmente como $x_n = \frac{y_n}{s_n a_n}$ se tiene que

$$x_n = \frac{\frac{2^n - 1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = 2^n - 1$$

•

El siguiente ejemplo ilustra un poco el proceso de transformación de una recurrencia para convertirse en una recurrencia del tipo suma. El algoritmo de quicksort es el método más importante y eficiente para ordenar un conjunto de datos unidimensionales. El siguiente ejemplo resuelve una recurrencia que aparece cuando se pretende analizar el comportamiento promedio de dicho algoritmo.

Ejemplo 5.12 *El número promedio de comparaciones que hace quicksort cuando ordena un conjunto de n datos tomados aleatoriamente satisface la siguiente recurrencia*

$$\begin{aligned} C_0 &= 0; \\ C_n &= n + 1 + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} C_k \quad n > 0 \ . \end{aligned}$$

Explicación: Primero multiplicaremos por n para eliminar los denominadores.

$$nC_n = n(n+1) + 2\sum_{k=0}^{n-1} C_k \quad n > 0 \ .$$

Luego para eliminar el signo de $\sum$ escribiremos la ecuación anterior reemplazando n por $n-1$

$$(n-1)C_{n-1} = (n-1)n + 2\sum_{k=0}^{n-2} C_k \quad n-1 > 0$$

y restando estas dos ecuaciones se tiene que

$$nC_n - (n-1)C_{n-1} = n^2 + n - n^2 + n + 2C_{n-1}$$

de donde sale que

$$nC_n = (n+1)C_{n-1} + 2n \tag{5.7}$$

Esta es una ecuación lineal de primer orden en la cual $a_n = n$, $b_n = n+1$ y $c_n = 2n$. Por lo tanto

$$s_n = \frac{a_{n-1}\cdots a_1}{b_n \cdots b_2} = \frac{(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{(n+1)(n)(n-1)\cdots 3} = \frac{2}{(n+1)n}$$

Multiplicando la ecuación 5.7 por este factor y dividiendo entre 2 nos queda

$$\frac{C_n}{n+1} = \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{2}{n+1}$$

Denominando $S_n = \frac{C_n}{n+1}$, y puesto que $C_0 = 0$ se tiene que $S_0 = 0$ y

$$S_n = S_{n-1} + \frac{2}{n+1}$$

cuya solución es

$$S_n = \sum_{1\le k\le n} \frac{2}{k+1} = 2\sum_{1\le i-1\le n} \frac{1}{i} = 2\sum_{2\le i\le n+1} \frac{1}{i} = 2H_{n+1} - 2$$

y recordando que $C_n = (n+1)S_n$ se tiene que

$$C_n = (n+1)(2H_{n+1} - 2) = 2(n+1)H_n - 2n$$

•

5.2.3 Recurrencias lineales con coeficientes constantes

Las recurrencias lineales con coeficientes constantes o ecuaciones en diferencia lineales con coeficientes constantes son las recurrencias más populares por su gran utilidad en diferentes disciplinas científicas como economía, administración, biología, computación, etc.

Una ecuación en diferencias lineal de orden k con coeficientes constantes es una ecuación de la forma siguiente:

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \cdots + a_kx_{n-k} = f_n \quad a_i \text{ constantes} \tag{5.8}$$

En la cual los coeficientes son todos constantes reales. Si la sucesión f_n es la sucesión nula, esto es, $f_n = 0$, se dice que la ecuación es homogénea y 5.8 se transforma en

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \cdots + a_kx_{n-k} = 0 \quad a_i \text{ constantes} \tag{5.9}$$

Es claro que a toda ecuación lineal de orden k se le asocia de manera natural una ecuación homogénea del mismo orden sustituyendo f_n por 0.

Veremos que para resolver una ecuación lineal a coeficientes constantes se resuelve la ecuación homogénea y luego se halla la solución general sumando la ecuación general de la homogénea con una solución particular de la ecuación no homogénea.

Primer orden

La ecuación en diferencias lineal de primer orden con coeficientes constantes se puede expresar como:

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} = f_n \quad \text{o} \quad x_n + ax_{n-1} = f_n \tag{5.10}$$

Esta ecuación es un caso particular de la ecuación en diferencia lineal de primer orden que se trató en 5.2.2 y puede resolverse multiplicándola por un factor sumante. Dejamos este enfoque como ejercicio y resolvéremos el caso en el cual f_n es una constante b.

La ecuación lineal de primer orden con coeficientes constantes

$$x_n = ax_{n-1} + b,$$

donde b, es una constante se puede resolver directamente de la siguiente manera:

Se escriben todos los términos $\leq n$ usando la recurrencia

$$\begin{array}{rcl} x_n & = & ax_{n-1} + b \\ x_{n-1} & = & ax_{n-2} + b \\ x_{n-2} & = & ax_{n-3} + b \\ \vdots & \vdots & \\ x_1 & = & ax_0 + b \end{array}$$

y se sustituyen progresivamente una en la anterior para obtener

$$\begin{array}{rcl} x_n & = & ax_{n-1} + b \\ & = & a(ax_{n-2} + b) + b = a^2 x_{n-2} + ab + b \\ & = & a^2(ax_{n-3} + b) + ab + b = a^3 x_{n-3} + a^2 b + ab + b \\ \vdots & \vdots & \\ & = & a^n x_{n-n} + a^{n-1} b + \cdots + a^2 b + ab + b \\ & = & a^n x_0 + b \sum_{i=0}^{n-1} a^i \\ & = & \begin{cases} a^n x_0 + b\frac{a^n - 1}{a-1} & \text{si } a \neq 1 \\ x_0 + nb & \text{si } a = 1 \end{cases} \end{array}$$

Para resolver la ecuación en diferencias lineal de primer orden hace falta presentar antes unos resultados generales que serán útiles también para resolver la ecuación de orden k en general.

Teorema 5.1 *El conjunto de soluciones de una ecuación lineal homogénea de orden k como*

$$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} = 0 \quad a_i \textit{ constantes}$$

forma un subespacio vectorial del espacio vectorial de todas las sucesiones de números reales. Dicho subespacio es de dimensión k.

La primera afirmación del teorema es inmediata. Lo que no parece tan inmediato es probar que la dimensión de dicho espacio sea justamente k. Esto es, se debe probar que existen k soluciones linealmente independientes de la ecuación que generan cualquier otra solución de la ecuación. En otras palabras, que toda solución de la ecuación se puede escribir a partir de k

soluciones independientes. La estrategia será mostrar k soluciones, mostrar que son independientes y mostrar que, en efecto, generan al espacio de soluciones. Cuando logremos esto, a la expresión de la combinación lineal genérica la llamaremos **solución general de la ecuación homogénea.**

El siguiente lema también nos será de utilidad.

Lema 5.2 *Si u y w son soluciones de la ecuación*

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + \cdots + a_kx_{n-k} = 0 \quad n \geq k$$

y coinciden en los primeros k término, entonces son iguales.

Nótese que el mismo resultado se obtiene para la ecuación no homogénea.

Retornemos al caso de **primer orden**. Deseamos resolver la ecuación homogénea de primer orden que por simplicidad escribiremos como

$$x_n + ax_{n-1} = 0 \tag{5.11}$$

Para probar que el espacio solución de esta ecuación es de dimensión 1 debemos hallar una solución linealmente independiente que genere a todo el espacio solución. Probaremos con una solución de la forma λ^n. Si λ^n es solución de (5.11) se debe cumplir que $\lambda^n + a\lambda^{n-1} = 0$ implicando que $\lambda^{n-1}(\lambda + a) = 0$, y por lo tanto, que $\lambda = -a$. Luego, $(-a)^n$ es solución de (5.11), y como un solo vector no nulo es linealmente independiente, falta sólo ver que $(-a)^n$ genera al espacio solución de (5.11). Sea $w = (w_0, w_1, w_2, \ldots)$ una solución arbitraria de (5.11), veamos que existe $k \in I\!R$ tal que la sucesión $u_n = k(-a)^n$ y w coincidan en su primer término, esto es, $u_0 = w_0$. Como, $u_0 = k(-a)^0$, se tiene que $u_0 = k$. Luego, si tomamos $k = w_0$ tenemos que la sucesión $u_n = w_0(-a)^n$ es solución de (5.11) y coincide con la sucesión w en su primer término y, en consecuencia, en base al lema 5.2, se tiene que son iguales. Por lo tanto, toda solución de (5.11) se puede escribir como combinación lineal de $(-a)^n$.

Segundo Orden

La ecuación en diferencias lineal de segundo orden con coeficientes constantes se expresa como

$$a_0x_n + a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2} = 0. \tag{5.12}$$

Para probar el teorema, en este caso, debemos hallar un par de soluciones que sean linealmente independientes y que generen al espacio de soluciones de (5.12). Si se espera que existan soluciones de la forma λ^n, debemos ver que condiciones debe satisfacer dicho λ. Sustituyendo λ^n en

(5.12), se tiene que $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} = 0$, de donde se deduce que $\lambda^{n-2}(a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2) = 0$. Concluimos, que λ debe ser una solución de esta ecuación $a_0\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ que llamaremos **ecuación característica**. Las raíces de esta ecuación pueden ser: reales y diferentes, reales e iguales o complejas conjugadas. Esto nos parte el problema en tres casos:

Reales y distintas: Sean λ_1, λ_2 las raíces diferentes de la ecuación característica, debemos probar que las soluciones λ_1^n y λ_2^n son linealmente independientes y que generan al espacio de solución de (5.12). Son linealmente independientes, pues si $c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ es la sucesión nula, se tiene que para todo $n \in I\!N$ se cumple que $c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n = 0$ y, en particular, para $n = 0$ y $n = 1$ lo cual implica que

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

De donde se deduce, que $c_1 = c_2 = 0$. Y generan al espacio de soluciones de (5.12), pues dada una sucesión arbitraria $w = (w_0, w_1, w_2, \ldots)$, podemos conseguir escalares k_1, k_2 tales que $u_n = k_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ y w_n coincidan en sus dos primeros términos y, por consiguiente, en virtud del teorema, en todos sus términos. Esto se debe a que el siguiente es un sistema compatible determinado, porque su determinante $\lambda_2 - \lambda_1$ es distinto de cero.

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = w_0 \\ k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = w_1 \end{cases}$$

Luego, toda solución de (5.12),puede expresarse en la forma

$$c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$$

Reales e iguales: Si λ_1 es la única raíz de la ecuación característica de (5.12), se tiene que $n\lambda^n$ es también solución de (5.12), (probarlo) y que λ^n y $n\lambda^n$ son linealmente independientes, pues si $c_1\lambda^n + c_2 n\lambda^n = 0$ se tiene que

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Y esto implica que $c_1 = c_2 = 0$. Además, λ^n y $n\lambda^n$ generan el espacio de soluciones, pues para toda solución $w = (w_0, w_1, w_2, \ldots)$, existen escalares k_1, k_2 tales que $u_n = k_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_1^n$ y w_n coincidan en sus dos primeros términos, y por ende, sean iguales. Dichos escalares se obtienen al resolver el sistema

$$\begin{cases} k_1 = w_0 \\ k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = w_1 \end{cases}$$

cuya solución es $k_1 = w_0$ y $k_2 = (w_1 - k_1\lambda_1)/\lambda_1$. Concluimos que la solución general en el caso de raíces reales repetidas es

$$c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_1^n$$

Esto prueba el teorema para el caso segundo orden raíces reales e iguales.
Raíces complejas conjugadas: Este caso se deja como ejercicio.

Retardaremos un poco el caso general para ver antes el **caso no homogéneo** y unos ejemplos que aclaren un poco lo expuesto hasta este momento.

Teorema 5.3 *Si x_n^h es solución de la ecuación homogénea asociada a la ecuación homogénea 5.10, y x_n^p es una solución de la ecuación no homogénea, entonces $x_n^h + x_n^p$ es solución de 5.10.*

A continuación mostramos varios ejemplos de la aplicación de estos resultados a la resolución de recurrencias de segundo orden.

Ejemplo 5.13 *Resolver la ecuación en diferencias*

$$x_n = -5x_{n-1} + 6x_{n-2} \quad x_0 = 1, x_1 = 2$$

Respuesta: Escribimos la ecuación como $x_n + 5x_{n-1} - 6x_{n-2} = 0$. Su ecuación característica es

$$\lambda^2 + 5\lambda - 6 = 0$$

Factorizando se tiene $(\lambda + 6)(\lambda - 1) = 0$ lo que implica que las raíces son $\lambda = -6$ y $\lambda = 1$. Por lo tanto, la solución general es

$$x_n = c_1(-6)^n + c_2(1)^n = c_1(-6)^n + c_2$$

Como $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$ podemos determinar a c_1 y a c_2

$$\begin{aligned} c_1(-6)^0 + c_2 &= 1 \\ c_1(-6)^1 + c_2 &= 2 \end{aligned}$$

Esto conduce al sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ -6c_1 + c_2 = 2 \end{cases}$$

cuya solución es $c_1 = -\frac{1}{7}$ y $c_2 = \frac{8}{7}$ y por lo tanto la solución de la ecuación dada es

$$x_n = -\frac{1}{7}(-6)^n + \frac{8}{7}$$

•

Ejemplo 5.14 *Resolver*

$$x_n = 4x_{n-1} - 4x_{n-2} + n \quad x_0 = 0 \;\; x_1 = 1$$

Respuesta: Escribimos la ecuación de tal manera que se parezca a (5.8) y resolvemos su ecuación homogénea asociada

$$x_n - 4x_{n-1} + 4x_{n-2} = 0$$

Su ecuación característica es $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ y se factoriza como $(\lambda - 2)^2 = 0$ por lo que $\lambda = 2$ es una raíz de multiplicidad 2 de la eccuación característica. Por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n$$

Como el término no homogéneo es un polinomio de grado 1, intentaremos conseguir como solución particular una solución polinomial. Probaremos con un polinomio de grado 1. Si $x_n = an + b$ entonces $x_{n-1} = a(n-1) + b$ y $x_{n-2} = a(n-2) + b$. Por lo tanto, al sustituir en la ecuación nos queda,

$$an + b - 4(a(n-1) + b) + 4(a(n-2) + b) = n$$

Multiplicando y simplificando queda

$$an + (b - 4a) = n$$

Luego, $a = 1$ y $b = 4$ implicando que $n + 4$ es una solución particular de la ec. no homogénea. La solución general a la ec. no homogénea es por consiguiente

$$x_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n + n + 4$$

Usando las condiciones de borde $x_0 = 0$ y $x_1 = 1$ se tiene

$$\begin{aligned} x_0 &= c_1 2^0 + c_2(0)2^0 + (0) + 4 = 0 \\ x_1 &= c_1 2^1 + c_2(1)2^1 + (1) + 4 = 1 \end{aligned}$$

Se obtiene el sistema

$$\begin{cases} c_1 + 4 = 0 \\ 2c_1 + 2c_2 = -4 \end{cases}$$

Cuya solución es $c_1 = -4$ y $c_2 = 2$, por lo tanto

$$x_n = -4 \times 2^n + 2n \times 2^n + n + 4 = 2^{n+1}(n-2) + n + 4$$

•

Ejemplo 5.15 *Resolver la ecuación* $x_n + 4x_{n-2} = 2^n$ *sujeta a* $x_0 = 0, x_1 = 1$

Respuesta: La ecuación homogénea asociada es $x_n + 4x_{n-2} = 0$ y tiene como ecuación característica a $\lambda^2 + 4 = 0$, cuyas soluciones son $\lambda = \pm 2i$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
x_n^h &= c_1(2i)^n + c_2(\overline{2i})^n \\
&= c_1(2\operatorname{cis}\frac{\pi}{2})^n + c_2(\overline{2\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}})^n \\
&= c_1(2^n\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}n) + c_2(\overline{2^n\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}n}) \\
&= c_1(2^n\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}n) + c_2(\overline{2^n\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}n}) \\
&= 2^n(c_1\cos\frac{\pi}{2}n + c_1 i\sin\frac{\pi}{2}n + c_2\cos\frac{\pi}{2}n - c_2 i\sin\frac{\pi}{2}n) \\
&= 2^n\left[(c_1+c_2)\cos\frac{\pi}{2}n + (c_1-c_2)i\sin\frac{\pi}{2}n\right] \\
&= 2^n\left[b_1\cos\frac{\pi}{2}n + b_2\sin\frac{\pi}{2}n\right]
\end{aligned}$$

Donde $b_1 = c_1 + c_2$ y $b_2 = (c_1 - c_2)i$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación homogénea es

$$x_n^h = 2^n\left[b_1\cos\frac{\pi}{2}n + b_2\sin\frac{\pi}{2}n\right]$$

Nos falta hallar una solución particular a la ecuación no homogénea. Dicha ecuación debe ser de la forma $x_n^p = c2^n$. Sustituyendo en la ecuación original se tiene que $c2^n + 4c2^{n-2} = 2^n$, lo cual implica que $c2^{n+1} = 2^n$ y por lo tanto $c = \frac{1}{2}$. Luego $x_n^p = 2^{n-1}$ y la solución general de la ecuación no homogénea es

$$x_n = 2^n\left[b_1\cos\frac{\pi}{2}n + b_2\sin\frac{\pi}{2}n + \frac{1}{2}\right]$$

Como $x_0 = 0$ se tiene que $2^0(b_1\cos 0 + b_2\sin 0 + \frac{1}{2}) = 0$, lo cual implica que $b_1 = -\frac{1}{2}$. Además puesto que $x_1 = 1$ entonces se tiene que $2^1(b_1\cos\frac{\pi}{2} +$

$b_2 \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}) = 1$ y por lo tanto $b_2 = 0$. Luego la solución buscada es

$$x_n = 2^{n-1} \left[1 - \cos \frac{\pi}{2} n \right] .$$

•

Coeficientes Indeterminados

Como elegir la solución particular:

1. Si $f_n = P(n)$, donde $P(n)$ es un polinomio de grado s, probar con un polinomio $Q(n)$ de grado s
2. Si $f_n = P(n)a^n$, donde $P(n)$ es un polinomio de grado s y a no es raíz de la ecuación característica, la solución particular debe buscarse de la misma forma $Q(n)a^n$, con $Q(n)$ de grado s.
3. Si $f_n = P(n)a^n$, con $P(n)$ de grado s y a **es raíz de multiplicidad** α de la ecuación característica, la solución particular debe buscarse de la forma $n^\alpha Q(n)a^n$, con $Q(n)$ de grado s.
4. Si $f_n = r^n[P(n)\cos\theta n + Q(n) \operatorname{sen}\theta n]$ y $r \operatorname{cis}\theta$ es raíz de multiplicidad α de la ec. característica., tomar $r^n n^\alpha [R_s(n)\cos bn + T_s(n)\operatorname{sen} bn]$, con s máximo grado estre P y Q.

Caso General

Proposición 5.4 *Si x_n^* es solución de la ecuación homogénea 5.9 también lo es cx_n^**

Prueba: Basta substituir cx_n^* en 5.9 y verificar que se cumple la igualdad

$$\begin{aligned} a_0 c x_n^* + a_1 c x_{n-1}^* + \cdots + a_k c x_{n-k}^* &= c(a_0 x_n^* + a_1 x_{n-1}^* + \cdots + a_k x_{n-k}^*) \\ &= c \times 0 = 0 \end{aligned}$$

□

Proposición 5.5 *Si x_n^* y y_n^* son soluciones de 5.9 también lo es $x_n^* + y_n^*$*

Prueba: Substituyendo $x_n^* + y_n^*$ en 5.9

$$\begin{aligned} & a_0(x_n + y_n) + a_1(x_{n-1} + y_{n-1}) + \cdots + a_k(x_{n-k} + y_{n-k}) \\ &= a_0 x_n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} + a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \cdots + a_k y_{n-k} \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

□

Proposición 5.6 *Si w es una raíz de multiplicidad α del polinomio característico de (5.9) se tiene que $\forall\beta$ tal que $0 \leq \beta \leq \alpha - 1$ se cumple que $x_n = n^\beta w^n$ es solución de (5.9).*

Prueba: Por inducción sobre β. Si $\beta = 0$ se tiene que $x_n = w^n$ pero como w es raíz de $a_0\lambda^k + a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_k$ se tiene que

$$a_0 w^k + a_1 w^{k-1} + \cdots + a_k = 0$$

y por consiguiente si multiplicamos por w^{n-k} obtenemos

$$a_0 w^n + a_1 w^{n-1} + \cdots + a_k w^{n-k} = 0$$

Lo que significa que, en efecto, w^n es solución de (5.9).
Supongamos que la proposición es cierta para todo $\beta' < \beta$, esto es, que $\forall\beta' < \beta$, $x_n = n^{\beta'} w^n$ es solución de la ecuación homogénea, o sea que $a_0 n^{\beta'} w^n + a_1(n-1)^{\beta'} w^{n-1} + \cdots + a_k(n-k)^{\beta'} n^{n-k} = 0$ (que puede escribirse como $\sum_{i=0}^k a_i(n-i)^{\beta'} w^{n-i} = 0$) y queremos ver que también es cierta para β, esto es que $\sum_{i=0}^k a_i(n-i)^\beta w^{n-i} = 0$

Tomemos la derivada $\beta-$ésima de

$$P(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_k\lambda^{n-k}$$

$$P^{(\beta)}(\lambda) = a_0 n^{\underline{\beta}}\lambda^{n-\beta} + a_1(n-1)^{\underline{\beta}}\lambda^{n-1-\beta} + \cdots + a_k(n-k)^{\underline{\beta}}\lambda^{n-k-\beta}$$

Nótese que $n^{\underline{\beta}}$ es un polinomio en n de grado β y de término independiente nulo, mientras que $(n-i)^{\underline{\beta}}$ son las respectivas evaluaciones de dicho polinomio en $n-i$. Digamos que $Q(n) = n^{\underline{\beta}} = \sum_{j=1}^{\beta} b_j n^j$ y reescribamos a $P^{(\beta)}(\lambda)$ como:

$$\begin{aligned}
P^{(\beta)}(\lambda) &= \sum_{i=0}^{k} a_i(n-i)^{\underline{\beta}}\lambda^{n-i-\beta} \\
&= \sum_{i=0}^{k} a_i Q(n-i)\lambda^{n-i-\beta} \\
&= \sum_{i=0}^{k} a_i \sum_{j=1}^{\beta} b_j (n-i)^j \lambda^{n-i-\beta}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{\beta}\sum_{i=0}^{k} a_i b_j (n-i)^j \lambda^{n-i-\beta} \\
&= \sum_{j=1}^{\beta} b_j \sum_{i=0}^{k} a_i (n-i)^j \lambda^{n-i-\beta}
\end{aligned}
$$

Dado que w es raíz de multiplicidad α del polinomio característico también lo es de $P(\lambda)$ de la misma multiplicidad. Esto implica que w es también raíz de todas las derivadas de orden $\leq \alpha - 1$ y por consiguiente $P^{(\beta)}(w) = 0$. Evaluando este polinomio en w y multiplicando el resultado por w^{β} se obtiene,

$$\sum_{j=1}^{\beta} b_j \sum_{i=0}^{k} a_i (n-i)^j w^{n-i} = 0$$

Por hipótesis $\sum_{i=0}^{k} a_i (n-i)^j w^{n-i} \quad \forall j < \beta$. Por lo tanto

$$\sum_{j=1}^{\beta-1} b_j \sum_{i=0}^{k} a_i (n-i)^j w^{n-i} = 0$$

lo cual implica que el último sumando también es nulo, esto es,

$$\sum_{i=0}^{k} a_i (n-i)^{\beta} w^{n-i} = 0$$

□

Puede probarse que si $w_1, w_2, \ldots, w_r$ son todas las raíces complejas de la ecuación característica de la ecuación homogénea de orden k y sus multiplicidades son respectivamente $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ el conjunto $B = \{w_1^n, nw_1^n, \ldots, n^{\alpha_1 - 1} w_1^n, w_2^n, \ldots, n^{\alpha_2 - 1} w_r^n, w_r^n, \ldots, n^{\alpha_r - 1} w_r^n\}$ forma una base para el espacio vectorial de las soluciones de la ecuación homogénea. Por lo tanto la solución general de la ecuación homogénea (5.9) es una combinación lineal de elementos en B. Para hallar una solución particular a dicha ecuación hay que especificar k condiciones.

Lema 5.7 *Si $w_1, w_2, \ldots, w_r$ son números reales distintos, entonces las sucesiones $w_1^n, w_2^n, \ldots, w_r^n$ son sucesiones linealmente independientes.*

Prueba: Supongamos que no lo fueran. Si $w_1^n, w_2^n, \ldots, w_r^n$ no son independientes, entonces existen $a_1, a_2, \ldots, a_r$ no todas nulas tales que

$$a_1 w_1^n + a_2 w_2^n + \cdots, a_r w_r^n = 0$$

Sean $b_1, b_2, \ldots, b_k$ y $w_1, w_2, \ldots, w_k$ un retiquetamiento de los a_i y los w_i para los cuales a_i no son nulos. $k \geq 1$ pues por hipótesis las a_i no son todas nulas. Esto nos transforma la ecuación anterior en

$$b_1 w_1^n + b_2 w_2^n + \cdots, b_k w_k^n = 0$$

Dividiendo esta ecuación entre w_1^n nos queda que

$$b_1 + b_2 \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^n + \cdots + b_k \left(\frac{w_k}{w_1}\right)^n = 0$$

y derivando con respecto a n se tiene que

$$b_2 \ln \frac{w_2}{w_1} \left(\frac{w_2}{w_1}\right)^n + \cdots + b_k \ln \frac{w_k}{w_1} \left(\frac{w_k}{w_1}\right)^n = 0$$

en la cual podemos eliminar el w_1^n pues está en todos los términos y obtener

$$b_2 \ln \frac{w_2}{w_1} w_2^n + \cdots + b_k \ln \frac{w_k}{w_1} w_k^n = 0$$

Si repetimos este proceso $k-1$ veces se tiene

$$b_k \ln \frac{w_k}{w_1} \ln \frac{w_k}{w_2} \cdots \ln \frac{w_k}{w_{k-1}} w_k^n = 0$$

Lo cual es imposible pues como $w_i \neq w_j$ se tiene que $\ln \frac{w_i}{w_j} \neq 0$ y, por hipótesis, $b_k \neq 0$. Luego $w_1^n, w_2^n, \ldots, w_r^n$ son imdependientes. □

Lema 5.8 *Si $w_1, w_2, \ldots, w_r$ son números reales distintos, entonces las sucesiones*

$$\begin{array}{ccccc}
w_1^n, & nw_1^n, & n^2 w_1^n, & \ldots & n^{\beta_1} w_1^n, \\
w_2^n, & nw_2^n, & n^2 w_2^n, & \ldots & n^{\beta_2} w_2^n, \\
\vdots & & & & \vdots \\
w_r^n, & nw_r^n, & n^2 w_r^n, & \ldots & n^{\beta_r} w_r^n,
\end{array}$$

son sucesiones linealmente independientes.

Prueba: Si suponemos que estas sucesiones no son dependientes, entonces se tiene la siguiente combinación lineal

$$P_1(n) w_1^n + P_2(n) w_2^n + \cdots + P_r(n) w_r^n = 0$$

en la cual los $P_i(n)$ son polinomios de grado menor o igual que β_i y por lo menos uno de tales polinomios no es idénticamente nulo. Supongamos que $P_r(n)$ no es idénticamente nulo (si no reetiquetamos)

Si dividimos esta expresión entre w_1^n y luego derivamos β_1+1 el primer sumando desaparece y nos que una expresión de la forma

$$Q_2(n)w_2^n + \cdots + Q_r(n)w_r^n = 0$$

En la cual los grados de los Q_i coinciden con los grados de los P_i porque al derivar, por ejemplo, a $P_i(n)\left(\frac{w_i}{w_1}\right)^n$ se tiene

$$[P_i(n)\ln\frac{w_i}{w_1}\left(\frac{w_i}{w_1}\right)^n + P_i^{'}(n)\left(\frac{w_i}{w_1}\right)^n]$$

en el cual el término de mayor grado es el mismo de $P_i(n)$ multiplicado por $\ln\frac{w_i}{w_1}$ que es distinto de cero porque $w_i \neq w_1$. En particular, el grado de P_r y de Q_r coinciden.
Si repetimos este proceso $r-1$ veces se obtiene

$$R_r(n)w_r^n = 0$$

lo cual es imposible porque el grado de R_r es igual al de P_r y en consecuencia no es idénticamente nulo. Luego, las sucesiones dadas son linealmente independientes. □

Proposición 5.9 *La solución general de la ecuación no homogénea (5.8) se obtiene sumando a la solución general de la ecuación homogénea una solución particular de la ecuación no homogénea. En otras palabras, si x_n^h es la solución general de la ecuación homogénea y x_n^p es solución particular de la ecuación no homogénea entonces la solución general de la ecuación no homogénea es $x_n^h + x_n^p$.*

Prueba: Basta substituir $x_n^h + x_n^p$ en (5.8) y comprobar que, en efecto, esta ecuación se satisface.

$$\begin{aligned}
&a_0(x_n^h + x_n^p) + a_1(x_{n-1}^h + x_{n-1}^p) + \cdots + a_k(x_{n-k}^h + x_{n-k}^p) \\
&\quad = \quad (a_0x_n^h + a_1x_{n-1}^h + \cdots + a_kx_{n-k}^h) + (a_0x_n^p + a_1x_{n-1}^p + \cdots + a_kx_{n-k}^p) \\
&\quad = \quad 0 + f_n = f_n
\end{aligned}$$

El primer paréntesis es cero porque x_n^h es solución de la ecuación homogénea y el segundo es f_n pues x_n^p es solución de la ecuación no homogénea. □

5.3 Problemas

1. Para todo $n \geq 1$ se define el determinante D_n, de $n \times n$ como

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1+a^2 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 1+a^2 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+a^2 \end{vmatrix}$$

Demostrar que si $n \geq 3$, se tiene que $D_n = (1+a^2)D_{n-1} - a^2 D_{n-2}$. Resolver esta recurrencia para concluir que

$$D_n = \frac{1-a^{2n+2}}{1-a^2}, \quad \text{si } a^2 \neq 1 \ .$$

2. Sea a_n el número de maneras de llenar una matriz de dimensión $2 \times n$ con piezas de dominó de dimensiones 1×2. Halle una recurrencia para a_n. ¿Qué números son estos?

3. Una Torre de Hanoi Doble consta de $2n$ discos de n tamaños diferentes, dos de cada tamaño. Como antes, se nos pide mover los discos de una estaca a otra uno cada vez, sin poner un disco mayor sobre uno menor.

   (a) ¿Cuántos movimientos se requieren, si los discos de igual tamaño son indistinguibles uno del otro?

   (b) ¿Cuántos movimientos se requieren, si los discos de igual tamaño son distintos y se nos pide que la torre quede como estaba originalmente?

4. Encuentre una recurrencia para contar el número de formas diferentes de realizar un producto de n matrices. Resuelva dicha recurrencia usando el método de la función generatriz.

5. Halle una recurrencia para contar el número de formas de colocar n metros de banderas en un asta de n metros si se puede usar tres tipos de banderas a saber: banderas rojas de dos metros de alto, banderas amarillas de un metro de alto y banderas azules de un metro de alto.

6. Sea C_n el número de regiones del plano que se obtinen cuando se dibujan sobre el mismo n circunferencias tales que cada circunferencia corta a cada una de las restantes en exactamente dos puntos y cada punto de intersección pertenece solo a dos circunferencias. Halle una recurrencia para C_n y resuélvala.

7. Para todo $n \geq 1$ se define el determinante D_n, de $n \times n$ como

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c & a & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

   Halle una recurrencia para D_n y resuélvala.

8. Un árbol AVL es un árbol binario con raíz en el cual para cualquier nodo la diferencia de altura de sus subárboles derecho e izquierdo es a lo sumo uno. Halle una recurrencia que permita determinar el número mínimo de nodos que posee un árbol AVL de altura n.

9. Halle una recurrencia que permita contar el número de secuencias de longitud n en el alfabeto $\{0, 1, 2\}$ que tienen un número par de ceros y resuélvala.

10. Halle una fórmula para el número de maneras de colocar n bloques que pueden ser rojos, azules, blancos o negros, de tal manera que no queden dos bloques rojos adyacentes.

11. Escriba una recurrencia que permita contar los desarreglos (Permutaciones que no tienen punto fijo) y resuélvala usando el método de la suma.

12. Resuelva la ecuación $y_n = a y_{\frac{n}{b}} + c_n$ en los siguientes casos

    (a) $b = 2, a = 1, c_n = k, n = 2^r$

    (b) $b = 2, a = 1, c_n = n, n = 2^r$

13. Use el método de sumas para resolver la siguiente recurrencia

$$y_n = a + nb + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y_k \quad n > 0, \quad y_0 = 0.$$

14. Use el método de sumas para resolver las siguientes ecuaciones en diferencia

    (a) $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{n}, \quad x_1 = 1$

    (b) $x_n = n x_{n-1} + 1, \quad x_1 = 1$

    (c) $n x_n = (n-1) x_{n-1} + 2^n, \quad x_0 = 1$

(d) $nx_n = (n+1)x_{n-1} + n - 1, \quad x_0 = 0$

15. Ciudad Gallo es una ciudad que es famosa por la gran cantidad de galleras que tiene. Cada gallera cobra 1 bolívar al entrar y un bolívar al salir. En cada gallera, si uno apuesta x bolívares a un gallo y el gallo gana recibe $2x$ bolívares, y si el gallo no gana pierde los x bolívares.

    Un buen día llegó a ciudad Gallo el señor Yago, quien posee el don sobrenatural de saber de antemano el gallo ganador en cualquier pelea de gallos. Como debido a la inflación estaba fallo de dinero decidió visitar n galleras y para no despertar sospechas en cada gallera apostaría sólo una vez todo el dinero que tuviera en el momento de hacer la apuesta.

    (a) Si G_n representa la cantidad de bolívares que posee el señor Yago al salir de la $n-$ésima gallera, y antes de entrar en la primera gallera el señor Yago poseía k bolívares, halle una recurrencia para G_n

    (b) Determine una fórmula cerrada para G_n

    (c) ¿Cuánto dinero tenía el señor Yago antes de entrar en la primera gallera, si al salir de la tercera no tenía dinero?

16. Sobre una circunferencia se marcan $2n$ puntos. ¿De cuántas maneras diferentes pueden unirse, todos los $2n$ puntos, por n cuerdas que no se intersecten dentro de la circunferencia?

17. Resolver las siguientes ecuaciones en diferencias

    (a) $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0 \quad x_0 = 1, x_1 = 1$

    (b) $x_n - 4x_{n-1} + 4x_{n-2} = 0 \quad x_0 = 0, x_1 = 1$

    (c) $x_n + 9x_{n-2} = 0 \quad x_0 = 0, x_1 = 1$

    (d) $x_n + x_{n-1} + x_{n-2} = 0 \quad x_0 = 1, x_1 = 3$

18. El día primero de febrero una persona abre una cuenta bancaria con S_0 bolívares y el día primero de cada uno de los meses siguientes deposita en dicha cuenta a bolívares. Si el Banco compone el interés mensualmente (abona los intereses mensualmente) y ofrece una tasa de interés anual del $r\%$, halle una expresión para el saldo S_n que tendrá dicha persona en su cuenta al cabo de n meses justo antes de efectuar su $n-$ésimo depósito. Halle también el saldo B_n al cabo de n meses justo después de efectuar el $n-$ésimo depósito.

19. Hallar la fórmula general de la solución de las siguientes recurrencias y la solución particular para los valores iniciales especificados.

    (a) $2x_n + x_{n-1} - 3x_{n-2} = f_n; \quad f_n = 2^n, f_n = n-1, f_n = n2^n;$
    $x_0 = 0, x_1 = 1$

    (b) $x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n = f_n; \quad f_n = 3^n, f_n = 2^n + 1, f_n = n+1;$
    $x_0 = 1, x_1 = 1$

    (c) $x_n - 4x_{n-2} = f_n; \quad f_n = n^2 + 1, f_n = 2^n, f_n = n2^n;$
    $x_0 = 1, x_1 = 2$

    (d) $x_n + x_{n-2} = f_n; \quad f_n = \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}, f_n = 2, f_n = n2^n;$
    $x_0 = 1, x_1 = 2$

Convenientemente, es verdad...—El que se viste
de harapos convenientemente lavados, se viste
convenientemente, es verdad, pero no por esto
deja de ir vestido de harapos.
Federico Nietzsche. El viajero y su sombra.

Capítulo 6

Función Generatriz

6.1 Definición y Propiedades

Definición 6.1 (Función Generatriz Ordinaria) *Dada una sucesión de números $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ pertenecientes a un anillo conmutativo con identidad 1, se define su función generatriz ordinaria como la serie formal*

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

Esto es, a cada sucesión f_n se le asocia el objeto algebraico: $\sum_{n\geq 0} f_n z^n$.

Caveat: Esta serie no tiene por que converger. El z^n es sólo un indicador de posición, esto es, indica que su coeficiente es el $n-$ésimo término de la sucesión correspondiente.

Por ejemplo, la función generatriz de la sucesión $1, 1, 1, 1, \ldots$ es $\sum_{n\geq 0} z^n$ y la F.G. de la sucesión $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$ es $\sum_{n\geq 0} 2^n z^n$.

Ejercicio 6.1 *Halle las funciones generatrices de las sucesiones* $1, -1, 1, -1, \ldots$ *y* $1, c, c^2, c^3, c^4, \ldots$.

La serie $\sum_{n\geq 0} z^n$ se puede expresar como $\frac{1}{1-z}$, donde este cociente debe interpretarse como una división entre polinomios formales. A esta última expresión se le denomina fórmula cerrada de la función generatriz. El corazón de la manipulación de las funciones generatrices radica en transformar las funciones generatrices a su fórmula cerrada, manipular las fórmulas cerradas y finalmente revertir el cambio para obtener la función generatriz de la sucesión deseada.

Como las funciones generatrices son series formales, se pueden manipular como tales, esto es, se pueden sumar, multiplicar, derivar, integrar, etc., etc.

- **Sustitución:** Si $F(z)$ es la función generatriz de la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ entonces $F(cz)$ es la F.G. de la sucesión $\{c^n a_n\}_{n=0}^{\infty}$
Ejemplo: Como $F(z) = \sum z^n = \frac{1}{1-z}$ es la FG de la sucesión $\langle 1, 1, 1, \ldots\rangle$ entonces
$$F(cz) = \sum c^n z^n = \frac{1}{1-cz}$$
es la FG de la sucesión $\langle 1, c, c^2, c^3, \ldots\rangle$
Si por ejemplo, necesito la sucesión cuya función generatriz tiene la fórmula cerrada $\frac{1}{1+3z}$ puedo hallarla a partir de la de $\sum z^n = \frac{1}{1-z}$ substituyendo z por $-3z$, esto es, $\sum(-3z)^n = \frac{1}{1-(-3z)}$ y por lo tanto $\sum(-3)^n z^n = \frac{1}{1+3z}$ de donde se tiene que $a_n = (-3)^n$.

- **Suma:** Si $F(z)$ y $G(z)$ son respectivamente las FG de las sucesiones $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ entonces $F(z) + G(z)$ es la FG de la sucesión $\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}$
Ejemplo: Como $F(z) = \sum z^n = \frac{1}{1-z}$ es la FG de la sucesión $\langle 1, 1, 1, \ldots\rangle$ y $G(z) = \sum 2^n z^n = \frac{1}{1-2z}$ es la FG de la sucesión $\langle 1, 2, 2^2, 2^3, \ldots\rangle$ entonces
$$F(z) + G(z) = \sum(1 + 2^n)z^n = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-2z} = \frac{2-3z}{(1-z)(1-2z)}$$
es la FG de la sucesión $\langle 2, 1+c, 1+c^2, 1+c^3, \ldots\rangle$

- **Multiplicación:** (Convolución) Si $F(z)$ y $G(z)$ son respectivamente las FG de las sucesiones $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ entonces $F(z)G(z)$ es la FG de la sucesión $\{\sum_{0\le i\le n} a_i b_{n-i}\}_{n=0}^{\infty}$
Ejemplo: Como $F(z) = \sum nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$ y $G(z) = \sum 2^n z^n = \frac{1}{1-2z}$ entonces la FG de la sucesión $\{\sum_{0\le i\le n} i2^{n-i}\}_{n=0}^{\infty}$ es
$$F(z)G(z) = \sum_{n\ge 0}\sum_{0\le i\le n} i2^{n-i}z^n = \frac{z}{(1-z)^2}\cdot\frac{1}{1-2z}$$

- **Derivación:** Si $F(z)$ es la función generatriz de la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ entonces $zF'(z)$ es la F.G. de la sucesión $\{na_n\}_{n=0}^{\infty}$ y $F'(z)$ es la FG de la sucesión $\{(n+1)a_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$
Ejemplo: Como $F(z) = \sum z^n = \frac{1}{1-z}$ es la FG de la sucesión $\langle 1, 1, 1, \ldots\rangle$ entonces
$$zF'(z) = \sum nz^n = \frac{z}{(1-z)^2}$$
es la FG de la sucesión $\langle 0, 1, 2, 3, \ldots\rangle$

- **Integración:** Si $F(z)$ es la FG de la sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ entonces $\int_0^z F(t)dt$ es la FG de la sucesión $\{\frac{a_{n-1}}{n}\}_{n=1}^{\infty}$
  Ejemplo: Si $F(z) = \sum z^n = \frac{1}{1-z}$ entonces
  $$\int_0^z F(t)dt = -\ln|1-z| = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n$$

Ejemplo 6.1 *Halle una fórmula cerrada para la función generatriz de la sucesión* $f_n = n2^n$

Explicación: Se tiene que $\sum_{n\geq 0} 2^n z^n = \frac{1}{1-2z}$. Si derivamos se tiene que $\sum_{n\geq 0} 2^n n z^{n-1} = \frac{2}{(1-2z)^2}$, y si multiplicamos por z obtenemos

$$\sum_{n\geq 0} n2^n z^n = \frac{2z}{(1-2z)^2}$$

•

Ejercicio 6.2 *Halle una fórmula cerrada para la función generatriz de la sucesión* $f_n = n^2$.

Ejercicio 6.3 *Halle una fórmula cerrada para la función generatriz de la sucesión* $f_n = n^2 + 2^n + 3$

En los próximos dos ejemplos se muestran dos procedimientos útiles para determinar la sucesión que corresponde a una función generatriz de la cual se conoce su fórmula cerrada. El primero de dichos procedimientos se basa en la manipulación adecuada de la fórmula dada para transformarla en una suma de fórmulas más sencillas a las cuales sea fácil hallarles sus series correspondientes y luego sumar dichas series. Mientras que el segundo se basa en aplicar la fórmula de las series de Taylor

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Ejemplo 6.2 *Halle la sucesión cuya FG tiene la fórmula cerrada* $\frac{1-3z}{(1-z)^2(1-2z)}$

Explicación: Antes que nada descomponemos en fracciones simples la fórmula dada

$$\frac{1-3z}{(1-z)^2(1-2z)} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{(1-z)^2} + \frac{C}{1-2z}$$

$$1 - 3z = A(1-z)(1-2z) + B(1-2z) + C(1-z)^2$$

Luego se tiene que si:

$$\begin{array}{rcl} z = 1 & -2 = B(-1) & \Rightarrow B = 2 \\ z = \dfrac{1}{2} & -\frac{1}{2} = C\frac{1}{4} & \Rightarrow C = -2 \\ z = 0 & 1 = A + B + C & \Rightarrow A = 1 \end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{1-3z}{(1-z)^2(1-2z)} &= \frac{1}{1-z} + 2\frac{1}{(1-z)^2} - 2\frac{1}{1-2z} \\ &= \sum_{n\geq 0} z^n + 2\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n - 2\sum_{n\geq 0} 2^n z^n \\ &= \sum_{n\geq 0}(3 + 2n - 2^{n+1})z^n \end{aligned}$$

Por lo tanto la sucesión buscada es $\{3 + 2n - 2^{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ •

Ejercicio 6.4 *Usar la F.G. de la sucesión* $1, 1, 1, \ldots$ *para hallar el término general de la sucesión cuya función generatriz tiene como fórmula cerrada* $\frac{1}{1-3z+2z^2}$.

Ejemplo 6.3 *Usar la fórmula de Taylor para hallar el término general de una sucesión cuya función generatriz tiene como fórmula cerrada* $F(z) = \sqrt{1-2z}$

Explicación: Derivando sucesivamente se tiene que

$$\begin{aligned} F(z) &= \sqrt{1-2z} = (1-2z)^{1/2} \\ F^{(1)}(z) &= \frac{1}{2}(-2)(1-2z)^{-1/2} \\ F^{(2)}(z) &= \frac{1}{2}(-2)\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)(1-2z)^{-3/2} \\ F^{(3)}(z) &= \frac{1}{2}(-2)\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)\left(-\frac{3}{2}\right)(-2)(1-2z)^{-5/2} = -(1\cdot 3)(1-2z)^{-5/2} \\ F^{(4)}(z) &= (-1)(1\cdot 3\cdot 5)(1-2z)^{-7/2} \\ \vdots &= \vdots \\ F^{(n)}(z) &= (-1)(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3))(1-2z)^{-(2n-1)/2} \\ &= (-1)\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}(1-2z)^{-(2n-1)/2} \end{aligned}$$

Y por consiguiente

$$F^{(n)}(0) = -\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}$$

Luego

$$a_n = \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!n!} = \binom{2n-2}{n-1}\frac{1}{n2^{n-1}} \qquad n \geq 1$$

$$F(z) = \sum_{n\geq 1}\binom{2n-2}{n-1}\frac{1}{n2^{n-1}}z^n \quad .$$

•

Ejercicio 6.5 *Use la fórmula de Taylor para hallar el término general de una sucesión cuya función generatriz tiene como fórmula cerrada* $\sqrt{1-4x}$*. Resuelva también el problema usando el desarrollo del binomio.*

A continuación de muestra una tabla que contiene las manipulaciones de funciones generatrices más comunes y otra que contiene las funciones generatrices más usadas con sus respectivas sucesiones.

$$\begin{aligned}
\alpha A(z) + \beta B(z) &= \sum_{n\geq 0}(\alpha a_n + \beta b_n)z^n \\
z^m F(z) &= \sum_{n\geq 0} f_{n-m}z^n, \qquad m \geq 0, \text{ entero} \\
\frac{F(z) - f_0 - f_1 z - \cdots - f_{m-1}z^{m-1}}{z^m} &= \sum_{n\geq 0} f_{n+m}z^n, \qquad m \geq 0, \text{ entero} \\
F(kz) &= \sum_{n\geq 0} k^n f_n z^n \\
F'(z) &= \sum_{n\geq 0}(n+1)f_{n+1}z^n \\
zF'(z) &= \sum_{n\geq 0} n f_n z^n \\
\int_0^z F(t)dt &= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}f_{n-1}z^n \\
F(z)G(z) &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_k f_k g_{n-k}\right)z^n \\
\frac{1}{1-z}F(z) &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k\leq n} g_k\right)z^n
\end{aligned}$$

Sucesión	Función Generatriz	Fórmula Cerrada
$\langle 1,1,1,1,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geq 0} z^n$	$\frac{1}{1-z}$
$\langle 1,c,c^2,c^3,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geq 0} c^n z^n$	$\frac{1}{1-cz}$
$\langle 1,2,4,8,16,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geq 0} 2^n z^n$	$\frac{1}{1-2z}$
$\langle 1,-1,1,-1,1,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geq 0} (-1)^n z^n$	$\frac{1}{1+z}$
$\langle 1,2,3,4,5,6,\ldots\rangle$	$\sum_{n\geq 0} (n+1) z^n$	$\frac{1}{(1-z)^2}$
$\left\langle \binom{k}{0},\binom{k}{1},\binom{k}{2},\binom{k}{3},\ldots\right\rangle$	$\sum_{n\geq 0} \binom{k}{n} z^n$	$(1+z)^k$
$\left\langle 1,k,\binom{k+1}{2},\binom{k+2}{3},\ldots\right\rangle$	$\sum_{n\geq 0} \binom{k+n-1}{n} z^n$	$\frac{1}{(1-z)^k}$
$\left\langle 1,kc,\binom{k+1}{2}c^2,\binom{k+2}{3}c^3,\ldots\right\rangle$	$\sum_{n\geq 0} \binom{k+n-1}{n} c^n z^n$	$\frac{1}{(1-cz)^k}$
$\left\langle 0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right\rangle$	$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n$	$\ln\frac{1}{(1-z)}$
$\left\langle 1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{24},\ldots\right\rangle$	$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} z^n$	e^z

6.2 Resolución de Recurrencias

Una de las aplicaciones más importantes de las funciones generatrices es la resolución de recurrencias. En las próximas líneas mostraremos como se resuelve una recurrencia mediante el método de la función generatriz.

El método: Dada una recurrencia de una suceción $\{x_n\}$ el problema de hallar una fórmula cerrada de x_n en función de n se puede resolver mediante los siguientes cuatro pasos:

1. Escribir una sola ecuación que exprese a x_n en base a los demás elementos de la secuencia. Dicha ecuación debe ser válida para todos las enteros no negativos. Se asume que $x_i = 0$ si $i < 0$.

2. Multiplicar ambos lados de la ecuación por z^n y sumar sobre todos los valores de n. Del lado izquierdo se obtiene $X(z)$, mientras que el derecho se debe manipular para obtener una expresión algebraica que involucre a $X(z)$.

3. Resolver la ecuación resultante para obtener una fórmula cerrada para $X(z)$

4. Hallar la serie de potencias de $X(z)$ y tomar el coeficiente de z^n, que es justamente la fórmula cerrada de x_n.

A continuación se ilustra el método con varios ejemplos.

Ejemplo 6.4 *Resolver*

$$\begin{cases} a_n &=& 2a_{n-1}+1 \quad n \geq 1 \\ a_0 &=& 1 \end{cases}$$

Antes que nada, reescribamos esta recurrencia con una sola fórmula que sea válida para todo n. Esto lo logramos usando el corchete de Iverson.

$$a_n = (2a_{n-1}+1)[n>0] + a_0[n=0]$$

Sea $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Multiplicando por z^n y sumando se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}z^n + \sum_{n=1}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_0[n=0] \\ &= 2z\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}z^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} z^n + a_0 \\ &= 2z\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n + a_0 - 1 \\ &= 2z\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \frac{1}{1-z} + a_0 - 1 \end{aligned}$$

Como $a_0 = 1$ nos queda que

$$A(z) = 2zA(z) + \frac{1}{1-z}$$

$$(1-2z)A(z) = \frac{1}{1-z}$$

$$A(z) = \frac{1}{(1-z)(1-2z)} = \frac{-1}{1-z} + \frac{2}{1-2z}$$

Y puesto que $\frac{1}{1-z}$ y $\frac{1}{1-2z}$ son las FGs de 1^n y de 2^n respectivamente, se tiene que

$$A(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} 1^n z^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1+2^{n+1})z^n$$

Lo cual implica que

$$a_n = 2^{n+1} - 1$$

Ejemplo 6.5 *Resuelva la ecuación en diferencia*

$$y_n = 4y_{n-1} - 3y_{n-2} \quad \textit{si} \quad y_0 = 1, y_1 = 2$$

Escribimos la ecuación y sus condiciones iniciales como una sola ecuación que sea válida para cualquier número natural n, esto es

$$y_n = (4y_{n-1} - 3y_{n-2})[n > 1] + y_0[n = 0] + y_1[n = 1]$$

Multiplicando por z^n y sumando desde $n = 0$ hasta $n = \infty$ se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n &= \sum_{n=2}^{\infty} 4y_{n-1}z^n - \sum_{n=2}^{\infty} 3y_{n-2}z^n + \sum_{n=0}^{\infty} y_0[n=0]z^n + \sum_{n=0}^{\infty} y_1[n=1]z^n \\
Y(z) &= 4z\sum_{n=2}^{\infty} y_{n-1}z^{n-1} - 3z^2\sum_{n=2}^{\infty} y_{n-2}z^{n-2} + y_0 + y_1 z \\
&= 4z\sum_{n=1}^{\infty} y_n z^n - 3z^2\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n + y_0 + y_1 z \\
&= 4z\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n - 4y_0 z - 3z^2\sum_{n=0}^{\infty} y_n z^n + y_0 + y_1 z \\
&= 4zY(z) - 3z^2Y(z) - 4y_0 z + y_0 + y_1 z \\
&= \frac{(1-4z)y_0 + y_1 z}{1 - 4z + 3z^2}
\end{aligned}$$

Para $y_0 = 1$ y $y_1 = 2$ se tiene que

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{1 - 4z + 2z}{1 - 4z + 3z^2} = \frac{1 - 2z}{(3z-1)(z-1)} = \frac{1-2z}{(1-z)(1-3z)} \\
&= \frac{1}{2}(\frac{1}{1-3z} + \frac{1}{1-z}) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-3z} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z} \\
&= \frac{1}{2}\sum 3^n z^n + \frac{1}{2}\sum 1 z^n \\
&= \sum (\frac{3^n + 1}{2}) z^n
\end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$y_n = \frac{3^n + 1}{2}$$

Ejemplo 6.6 (Ecuación lineal de 2° orden) *Resolver la ecuación*

$$y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} = r_n \quad n \geq 2$$

Antes que nada, escribimos la ecuación y sus condiciones iniciales como una sola ecuación, esto es

$$y_n = \{-a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2} + r_n\}[n > 1] + y_0[n = 0] + y_1[n = 1]$$

Multiplicando por z^n y sumando desde $n = 0$ hasta $n = \infty$ se tiene

$$\sum_{n\geq 0} y_n z^n = -\sum_{n>1} a_1 y_{n-1} z^n - \sum_{n>1} a_2 y_{n-2} z^n + \sum_{n>1} r_n z^n + y_0 + y_1 z$$

$$\begin{aligned}
Y(z) &= -a_1 z \sum_{n>1} y_{n-1} z^{n-1} - a_2 z^2 \sum_{n>1} y_{n-2} z^{n-2} + \sum_{n>1} r_n z^n + y_0 + y_1 z \\
&= -a_1 z \sum_{n\geq 1} y_n z^n - a_2 z^2 \sum_{n\geq 0} y_n z^n + \sum_{n\geq 0} r_n z^n - r_0 - r_1 z + y_0 + y_1 z \\
&= -a_1 z \sum_{n\geq 0} y_n z^n + a_1 y_0 z - a_2 z^2 Y(z) + R(z) - r_0 - r_1 z + y_0 + y_1 z \\
&= -a_1 z Y(z) + a_1 y_0 z - a_2 z^2 Y(z) + R(z) - r_0 - r_1 z + y_0 + y_1 z
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$Y(z) = \frac{(a_1 y_0 + y_1 - r_1)z + (y_0 - r_0) + R(z)}{1 + a_1 z + a_2 z^2} \tag{6.1}$$

Ahora usaremos esta expresión para resolver varias ecuaciones en diferencias de segundo orden. Empezaremos por una ecuación homogénea.

$$y_n - 3y_{n-1} + 2y_{n-2} = 0 \quad n \geq 2$$

Como $r_n = 0$ tenemos que $r_0 = r_1 = 0$ y además $R(z) = 0$. Por lo tanto, al substituir en 6.1 se tiene

$$Y(z) = \frac{(-3y_0 + y_1)z + y_0}{1 - 3z + 2z^2},$$

y si $y_0 = 1$ y $y_1 = 2$ se tiene que

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{(-3(1) + 2)z + 1}{(1 - 2z)(1 - z)} = \frac{-z + 1}{(1 - 2z)(1 - z)} \\
&= \frac{1}{1 - 2z} \\
&= \sum_{n\geq 0} 2^n z^n
\end{aligned}$$

y por consiguiente $y_n = 2^n$.

Si los valores iniciales son $y_0 = 0$ y $y_1 = 3$ se tiene que

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{(-3(0)+3)z+0}{(1-2z)(1-z)} \\ &= \frac{3z}{(1-2z)(1-z)} \end{aligned}$$

Desconponiendo en fracciones simples,

$$\begin{aligned} \frac{3z}{(1-2z)(1-z)} &= \frac{a}{1-2z} + \frac{b}{1-z} \\ &= \frac{a(1-z)+b(1-2z)}{(1-2z)(1-z)} \end{aligned}$$

Y puesto que si $z = 1$ se tiene que $-b = 3$ tenemos que $b = -3$, además si $z = 0$ se tiene que $\frac{a}{2} = \frac{3}{2}$ y por lo tanto $a = 3$. Por consiguiete,

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{3}{1-2z} - \frac{3}{1-z} \\ &= 3\sum_{n\geq 0} 2^n z^n - 3\sum_{n\geq 0} 1^n z^n \\ &= \sum_{n\geq 0} 3(2^n - 1)z^n \end{aligned}$$

y por consiguiente $y_n = 3(2^n - 1)$.

Resolvamos ahora una ecuación en diferencia con término no homogéneo constante. Por ejemplo.

$$y_n - 3y_{n-1} + 2y_{n-2} = 1 \quad n \geq 2$$

Como $r_n = 1$ tenemos que $r_0 = 1, r_1 = 1$ y $R(z) = \sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z}$. Por lo tanto, al substituir en 6.1 se tiene

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{(-3y_0+y_1-1)z+(y_0-1)}{(1-z)(1-2z)} + \frac{\frac{1}{1-z}}{(1-z)(1-2z)} \\ &= \frac{(-3y_0+y_1-1)z+(y_0-1)}{(1-z)(1-2z)} + \frac{1}{(1-z)^2(1-2z)} \end{aligned}$$

Descomponiendo el segundo sumando en fracciones simples

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^2(1-2z)} &= \frac{a}{1-z}+\frac{b}{(1-z)^2}+\frac{c}{(1-2z)}\\ &= \frac{a(1-z)(1-2z)+b(1-2z)+c(1-z)^2}{(1-z)^2(1-2z)}\end{aligned}$$

Si $z=1$ tengo que $b=-1$; si $z=\frac{1}{2}$ se tiene que $(\frac{1}{2})^2c=1$ implicando que $c=4$. Y finalmente si $z=0$ se tiene que $a+b+c=1$ lo cual implica que $a=-2$. Por lo tanto,

$$Y(z)=\frac{(-3y_0+y_1-1)z+(y_0-1)}{(1-z)(1-2z)}-\frac{2}{1-z}-\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{4}{(1-2z)}$$

Finalmente si $y_0=0$ y $y_1=1$ tenemos que

$$\begin{aligned}Y(z) &= \frac{-1}{(1-z)(1-2z)}-\frac{2}{1-z}-\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{4}{(1-2z)}\\ &= \frac{1}{1-z}-\frac{2}{1-2z}-\frac{2}{1-z}-\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{4}{(1-2z)}\\ &= -\frac{1}{1-z}-\frac{1}{(1-z)^2}+\frac{2}{(1-2z)}\\ &= -\sum_{n\geq 0}1^nz^n-\sum_{n\geq 0}(n+1)1^{n+1}z^n+2\sum_{n\geq 0}2^nz^n\\ &= -\sum_{n\geq 0}(2^{n+1}-n-2)z^n\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$y_n=2^{n+1}-n-2$$

El siguiente paso es mostrar una ecuación en diferencia con término no homogéneo polinómico. Por ejemplo.

$$y_n-3y_{n-1}+2y_{n-2}=n \quad n\geq 2$$

Como $r_n=n$ tenemos que $r_0=0, r_1=1$ y $R(z)=\sum_{n\geq 0}nz^n$ Si no se sabe la fómula cerrada para $R(z)$ se puede obtener derivando $\sum_{n\geq 0}z^n=\frac{1}{1-z}$ y multiplicando el resultado por z. Se obtiene,

$$R(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$$

. Por lo tanto, al substituir en 6.1 se tiene

$$Y(z) = \frac{(-3y_0+y_1-1)z+(y_0-0)}{(1-z)(1-2z)}+\frac{\frac{z}{(1-z)^2}}{(1-z)(1-2z)}$$

$$= \frac{(-3y_0 + y_1 - 1)z + y_0}{(1-z)(1-2z)} + \frac{z}{(1-z)^3(1-2z)}$$

Descomponiendo el segundo sumando en fracciones simples

$$\begin{aligned} \frac{z}{(1-z)^3(1-2z)} &= \frac{a}{1-z} + \frac{b}{(1-z)^2} + \frac{c}{(1-z)^3} + \frac{d}{(1-2z)} \\ &= \frac{a(1-z)^2(1-2z) + b(1-z)(1-2z) + c(1-2z) + d(1-z)^3}{(1-z)^3(1-2z)} \end{aligned}$$

Si $z = 1$ tengo que $c = -1$; si $z = \frac{1}{2}$ se tiene que $(\frac{1}{2})^3 c = \frac{1}{2}$ implicando que $d = 4$. Si $z = 0$ se tiene que $a + b + c + d = 0$ lo cual implica que $a + b = -3$. Como el término cúbico de este desarrollo involucra sólo a a y a d y se obtiene de multiplicar en cada factor el término con z, se tiene que $-2a - d = 0$ lo que implica que $a = -2$ y $b = -1$. Por lo tanto,

$$Y(z) = \frac{(-3y_0 + y_1 - 1)z + y_0}{(1-z)(1-2z)} - \frac{2}{1-z} - \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{(1-z)^3} + \frac{4}{(1-2z)}$$

Finalmente si $y_0 = 0$ y $y_1 = 3$ tenemos que

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{2z}{(1-z)(1-2z)} - \frac{2}{1-z} - \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{(1-z)^3} + \frac{4}{(1-2z)} \\ &= -\frac{2}{1-z} + \frac{2}{1-2z} - \frac{2}{1-z} - \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{(1-z)^3} + \frac{4}{(1-2z)} \\ &= -\frac{4}{1-z} - \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{(1-z)^3} + \frac{6}{(1-2z)} \\ &= -4\sum_{n\geq 0} 1^n z^n - \sum_{n\geq 0} (n+1)1^{n+1} z^n - \sum_{n\geq 0} \frac{(n+2)(n+1)}{2} z^n + 6\sum_{n\geq 0} 2^n z^n \\ &= \sum_{n\geq 0} (3 \times 2^{n+1} - \frac{(n+2)(n+1)}{2} - (n+1) - 4) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$y_n = 3 \times 2^{n+1} - \frac{(n+2)(n+1)}{2} - (n+1) - 4$$

Por último resolveremos una ecuación con término no homogéneo exponencial...

$$y_n - 3y_{n-1} + 2y_{n-2} = 2^n \quad n \geq 2$$

Como $r_n = 2^n$ tenemos que $r_0 = 1, r_1 = 2$ y $R(z) = \sum_{n\geq 0} 2^n z^n = \frac{1}{1-2z}$. Por lo tanto, al substituir en 6.1 se tiene

$$Y(z) = \frac{(-3y_0 + y_1 - 2)z + (y_0 - 1)}{(1-z)(1-2z)} + \frac{\frac{1}{1-2z}}{(1-z)(1-2z)}$$

$$= \frac{(-3y_0 + y_1 - 2)z + (y_0 - 1)}{(1-z)(1-2z)} + \frac{1}{(1-z)(1-2z)^2}$$

Descomponiendo el segundo sumando en fracciones simples

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-z)(1-2z)} &= \frac{a}{1-z} + \frac{b}{1-2z} + \frac{c}{(1-2z)^2} \\ &= \frac{a(1-2z)^2 + b(1-z)(1-2z) + c(1-z)}{(1-z)(1-2z)^2} \end{aligned}$$

Si $z = 1$ tengo que $a = 1$, si $z = \frac{1}{2}$ se tiene que $\frac{1}{2}c = 1$ implicando que $c = 2$. Y finalmente si $z = 0$ se tiene que $a + b + c = 1$ lo cual implica que $b = -2$. Por lo tanto,

$$Y(z) = \frac{(-3y_0 + y_1 - 2)z + (y_0 - 1)}{(1-z)(1-2z)} + \frac{1}{1-z} - \frac{2}{1-2z} + \frac{2}{(1-2z)^2}$$

Finalmente si $y_0 = 0$ y $y_1 = 3$ tenemos que

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{z-1}{(1-z)(1-2z)} + \frac{1}{1-z} - \frac{2}{1-2z} + \frac{2}{(1-2z)^2} \\ &= \frac{1}{1-z} - \frac{3}{1-2z} + \frac{2}{(1-2z)^2} \\ &= \sum_{n\geq 0} z^n - 3\sum_{n\geq 0} 2^n z^n + \sum_{n\geq 0} (n+1)2^{n+1} z^n \\ &= \sum_{n\geq 0} (1 - 3\times 2^n + 2^{n+1}(n+1))z^n \end{aligned}$$

Por consiguiente

$$y_n = 1 - 3\times 2^n + 2^{n+1}(n+1) = 1 + (2n-1)2^n$$

A manera de comprobación observe que tanto por la recurrencia como por la fórmula hallada los primeros tres términos son $0, 3, 13$

Todos los ejemplos presentados hasta el presente se pudieron haber resuelto por alguno de los métodos presentados con anterioridad. Trataremos ahora una recurrencia que aparece con mucha frecuencia y que es el ejemplo que justifica al método de las funciones generatrices como herramienta para resolver recurrencias.

Ejemplo 6.7 *Resolver*

$$c_n = c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + \cdots + c_{n-1} c_0 \quad n > 0 \quad c_0 = 1$$

Antes que nada escribiremos la recurrencia con una ecuación válida para todo n,

$$c_n = (\sum_{0\le k\le n-1} c_k c_{n-k-1})[n \ge 1] + c_0[n = 0]$$

Si denotamos por $C(z) = \sum_{n\ge 0} c_n z^n$ y sumamos sobre todo n tenemos

$$\begin{aligned}
C(z) &= \sum_{n\ge 0}\left((\sum_{0\le k\le n-1} c_k c_{n-k-1})[n \ge 1] + c_0[n = 0]\right) z^n \\
&= \sum_{n\ge 1}\left(\sum_{0\le k\le n-1} c_k c_{n-k-1}\right) z^n + \sum_{n\ge 0}[n = 0]z^n \\
&= z\sum_{n\ge 1}\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k c_{n-k-1}\right) z^{n-1} + 1 \quad \text{c.v } m = n-1 \\
&= z\sum_{m+1\ge 1}\left(\sum_{k=0}^{m} c_k c_{m-k}\right) z^{m} + 1 \\
&= z\sum_{m\ge 0}\left(\sum_{k=0}^{m} c_k c_{m-k}\right) z^{m} + 1 \\
&= zC^2(z) + 1
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$zC^2(z) - C(z) + 1 = 0$$

Resolviendo esta ecuación para $C(z)$ por la resolvente se tienen las siguientes dos soluciones

$$C(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2z}$$

Usando el teorema del binomio podemos desarrollar la raíz en una serie y separar el primer término

$$\sqrt{1-4z} = \sum_{k\ge 0}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-4z)^k = 1 + \sum_{k\ge 1}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-4z)^k$$

Luego

$$C(z) \;=\; \frac{1\pm 1}{2z} \pm \frac{1}{2z}\sum_{k\ge 1}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-4z)^k$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1\pm 1}{2z} \pm \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\binom{\frac{1}{2}}{k}(-4)^k z^{k-1} \\
&= \frac{1\pm 1}{2z} \pm \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-4)^{n+1} z^{n}
\end{aligned}$$

Recordando que

$$\begin{aligned}
\binom{\frac{1}{2}}{n+1} &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{(n+1)!} \\
&= (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}(n+1)!} \\
&= (-1)^n\frac{\cancel{1}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{5}\cdots\cancel{(2n-1)}}{2^{n+1}(n+1)!}\cdot\frac{(2n)!}{\cancel{1}\cdot 2\cdot\cancel{3}\cdot 4\cdot\cancel{5}\cdots\cancel{(2n-1)}\ (2n)} \\
&= (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{n+1}(n+1)!2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} \\
&= (-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!(n+1)!} \\
&= (-1)^n\binom{2n}{n}\frac{2}{4^{n+1}(n+1)}
\end{aligned}$$

Luego se tiene que

$$C(z) = \frac{1\pm 1}{2z} \pm \sum_{n\geq 0} -\binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}z^n$$

Por lo tanto, si elegimos el signo $+$ todos los coeficientes serían negativos y $C(0)=c_0$ no estaría definido, pero si elegimos el negativo nos queda

$$C(z) = \sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}z^n$$

y por consiguiente

$$c_n = \binom{2n}{n}\frac{1}{n+1}$$

Esta sucesión de números se conoce como **números de Catalán**

Ejemplo 6.8 *Hallar una fórmula cerrada para la función generatriz de la sucesión determinada por la ecuación en diferencias*

$$a_n = \frac{1}{n}(a_{n-1}+a_{n-2}) \quad n\geq 2$$

con las condiciones iniciales $a_0 = 1$ *y* $a_1 = 1$.

Respuesta: Escribimos la recurrencia con una fórmula que sea válida para todo entero no negativo.

$$a_n = \frac{1}{n}(a_{n-1} + a_{n-2})[n \geq 2] + a_1[n = 1] + a_2[n = 0]$$

Multiplicando por nz^n y sumando sobre todos los valores de n se tiene que

$$\sum_{n\geq 0} na_n z^n = \sum_{n\geq 2} a_{n-1}z^n + \sum_{n\geq 2} a_{n-2}z^n + a_1 z + a_0 \cdot 0$$

y como $\sum_{n\geq 0} na_n z^n = z\sum_{n\geq 0} na_n z^{n-1} = zA^{'}(z)$

$$\begin{aligned}
zA^{'}(z) &= z\sum_{n\geq 2} a_{n-1}z^{n-1} + z^2\sum_{n\geq 2} a_{n-2}z^{n-2} + a_1 z \\
&= zA(z) + z^2A(z) - za_0 + a_1 z \\
&= zA(z) + z^2A(z) - z + z = z^2A(z) + zA(z)
\end{aligned}$$

De aquí se deduce que $\frac{A^{'}(z)}{A(z)} = z + 1$ que es una ecuación diferencial cuya solución es $\ln|A(z)| = \frac{z^2}{2} + z + c$. Luego, se tiene que $A(z) = ke^{\frac{z^2}{2}+z}$. Como $a_0 = 1$ y $A(0) = a_0$ sale que $k = 1$, y por lo tanto $A(z) = e^{\frac{z^2}{2}+z}$. ♡

6.3 Problemas

1. Resuelva las siguientes recurrencias por el método de la función generatriz

   (a) $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} \quad n \geq 2, \quad x_0 = 1, x_1 = 2;$
   (b) $x_n = 3x_{n-1} - 2x_{n-2} + n \quad n \geq 2, \quad x_0 = 0, x_1 = 1;$
   (c) $x_n = x_{n-2} + (-1)^n \quad n \geq 2, \quad x_0 = 0, x_1 = 2;$

2. Use el método de la FG para hallar la función generatriz de la solución de la recurrencia lineal de primer orden con coeficientes constantes

   $$a_0 x_n + a_1 x_{n-1} = c_n \qquad \text{con } x_0 \text{ conocido}$$

3. Resuelva la ecuación $x_n - 2x_{n-1} = n - 1$ por el método de la función generatriz con $x_0 = 0$.

4. Resuelva la recurrencia de la sucesión de Fibonacci usando funciones generatrices:

   $$f_n = \begin{cases} f_{n-1} + f_{n-2}, & \text{si } n \geq 2; \\ 1, & \text{si } n = 0, \text{ o } n = 1 \end{cases}$$

5. Resuelva la recurrencia

   $$\begin{aligned} x_0 &= 1; \\ x_n &= x_{n-1} + 2x_{n-2} + \cdots + n x_0, \qquad \text{si } n > 0 \end{aligned}$$

6. Demuestre que si $F(z)$ es la función generatriz de la sucesión $a_0, a_1, a_2, \ldots$ entonces $\frac{1}{1-z}F(z)$ es la función generatriz de la sucesión de sumas parciales $a_0, a_0 + a_1, a_0 + a_1 + a_2, \ldots$.

7. Encuentre una recurrencia para contar el número de formas diferentes de realizar un producto de n matrices. Resuelva dicha recurrencia usando el método de la función generatriz.

8. Sobre una circunferencia se marcan $2n$ puntos. ¿De cuántas maneras diferentes pueden unirse, todos los $2n$ puntos, por n cuerdas que no se intersecten dentro de la circunferencia?

9. Si $a_n = 1 + a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-2} + 2a_{n-1} \quad n \geq 1$ y $a_0 = 0$, encuentre la función generatriz de la sucesión $\{a_n\}$ y a partir de ella encuentre una fórmula cerrada para a_n.

10. Con las condiciones iniciales $y_0 = 0, y_1 = 1$ resuelva la siguiente ecuación en diferencias $y_n = y_1 y_{n-1} + y_2 y_{n-2} + \cdots + y_{n-1} y_1 \quad n \geq 2$

11. Halle las funciones generatrices de las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ si se sabe que

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1, \quad x_1 = 0; & y_0 = 0, \quad y_1 = 1; \\ x_n = 2y_{n-1} + x_{n-2} & y_n = x_{n-1} + y_{n-2}, \quad n \geq 2 \end{array}$$

Risa y sonrisa.—Cuanto más alegre y seguro de sí mismo
se siente el espíritu, más olvida la risa escandalosa;
al contrario, dibuja sin cesar una sonrisa más intelectual,
signo de su asombro a causa de los innumerables parecidos
ocultos que encierra la buena existencia.
El viajero y su sombra. Federico Nietzsche.

Capítulo 7

Cálculo de Diferencias y Sumas

En este capítulo se pretende mostrar el equivalente discreto al cálculo diferencial e integral. Para ello, empezaremos presentando la definición de operadores y el tipo de estructura que estos forman con el fin de sacar provecho a dichas estructuras. A continuación presentaremos los operadores fundamentales del cálculo de diferencias, y los resultados que podemos obtener de ellos. Mostraremos la equivalencia de ciertos resultados con los del cálculo diferencial. Finalmente, presentaremos el cálculo de sumas que es el equivalente discreto del cálculo integral.

7.1 Operadores

Informalmente hablando, un operador es una función que opera sobre funciones para producir nuevas funciones. Por ejemplo, el operador derivada opera sobre el conjunto de las funciones derivables y produce nuevas funciones ($D(f) = f^{'}$; en particular $D(x^2+2x-3) = 2x+2$). Otros operadores usuales sobre las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ son el operador multiplicación por una constante k esto es, $k(f) = k \cdot f$, el operador raíz cuadrada, el operador sumar una constante, elevar al cuadrado, elevar al cubo, multiplicar por x^i, etc. En general los operadores actúan sobre una familia de funciones como por ejemplo, $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donde $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ representan los números reales y complejos respectivamente, sin embargo si estudiamos el caso discreto es suficiente con considerar las funciones de $\mathbb{N}$ ó Z en $\mathbb{R}$, esto es, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ó $\mathbb{R}^{Z}$. En general, si G es un grupo y F es un cuerpo, F^G forma un espacio vectorial sobre el cuerpo F.

Dado el espacio vectorial $V = F^{\mathbb{N}}$ sobre el cuerpo F, un **operador** A sobre V es una función $A : V \to V$. Por lo tanto, V^V es el conjunto de los operadores, esto es, es el conjunto de las funciones de V en V. Por consiguiente, tiene sentido hablar de la suma de dos operadores y de la composición (multiplicación) de dos operadores. Nótese que, un operador es una función cuyo argumento es una función.

Algebra de Operadores

Un **álgebra** es un espacio vectorial V sobre un cuerpo F, junto con una operación de multiplicación en el conjunto V de los vectores, tal que para todo $k \in F$ y para todo $\alpha, \beta, \gamma \in V$ se cumple que

1. $(k\alpha)\beta = k(\alpha\beta) = \alpha(k\beta)$
2. $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$
3. $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$

También se dice que V es una $F-$álgebra.

Un **álgebra asociativa** es un álgebra en la que se cumple la propiedad asociativa, esto es:

4. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) \quad \forall \alpha, \beta, \gamma \in V.$

Obsérvese que, si V es una $F-$álgebra asociativa con la multiplicación $\circ$, entonces V con su suma y esta multiplicación forma un anillo—no necesariamente conmutativo.

Se dice que un operador L, es lineal si para toda $f, g \in V$ y para todo $k \in F$ se tiene que

(i) $L(f + g) = L(f) + L(g)$

(ii) $L(k \cdot f) = kL(f)$

Los operadores lineales con la composición forman una $F-$álgebra asociativa. Demostrarlo. Dicha $F-$álgebra no es conmutativa, esto es, existen operadores A y B tales que $AB \neq BA$. Muestre un ejemplo.

Ejercicio 7.1 *Demuestre que el conjunto $\mathcal{L}$ de los operadores lineales con la composición de operadores forman una $F-$álgebra no conmutativa.*

El Operador Diferencia

Dada una función $f : Z \to C$ (o de $\mathbb{N} \to C$; C se puede substituir por cualquier grupo abeliano) se define una nueva función Δf, que llamaremos la primera diferencia de f, por

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x).$$

donde h es una constante positiva fija que en muchos casos nos convendrá que sea 1.
Basados en esta definición se obtiene que la segunda diferencia de f es

$$\Delta^2 f(x) = \Delta[\Delta f(x)] = \Delta[f(x+h) - f(x)] = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$$

En general, se tiene que la $n-$ésima diferencia de f es

$$\Delta^n f(x) = \Delta[\Delta^{n-1} f(x)]$$

El Operador Desplazamiento

Se define el operador desplazamiento E como

$$E(f(x)) = f(x+h) \qquad h \text{ fijo}$$

Recibe este nombre porque la gráfica de la nueva función es la gráfica de f desplazada h unidades a la izquierda. Si aplicamos El operador E dos veces, se tiene

$$E^2 f(x) = E[Ef(x)] = Ef(x+h) = f(x+2h)$$

y, en general, se tiene

$$E^n f(x) = f(x+nh)$$

Operador Identidad

El operador identidad I ó 1 se define como

$$I(f(x)) = f(x)$$

Obsérvese que,

(i) El operador identidad conmuta con todos los operadores y además que los operadores Δ y E conmutan

(ii) Los operadores Δ y E son lineales

(iii) Se tiene que, $E = 1 + \Delta$ y que $\Delta = E - 1$

Ejercicio 7.2 *Demuestre que los operadores Δ y E son lineales y conmutan.*

Ejercicio 7.3 *Dé ejemplos de operadores que*

(i) *no conmuten*

(ii) *no sean lineales*

(iii) *lineales que no conmuten*

Como sabemos que $\Delta = E - 1$ se tiene que $\Delta^n = (E-1)^n$ y dado que $E, 1 \in \mathcal{L}$ y conmutan, se puede aplicar la fórmula del binomio para obtener que

$$\Delta^n = (E-1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{n-i} E^i \tag{7.1}$$

Además como $E = \Delta + 1$ se tiene que

$$E^n = (\Delta + 1)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i \tag{7.2}$$

Por lo tanto,

$$E^n f(x) = (\Delta + 1)^n f(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i f(x)$$

$$f(x+nh) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i f(x)$$

y si evaluamos en $x = 0$ y tomamos $h = 1$ se tiene que

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \Delta^i f(0) \tag{7.3}$$

Alerta: $\Delta^i f(0)$ significa hallar la $i-$ésima diferencia finita de $f(x)$ y luego evaluarla en $x = 0$. También puede representarse como $\Delta^i f(x)\big|_{x=0}$

Ejercicio 7.4 *Demuestre que*

$$(-1)^n \Delta^n f(0) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (-1)^i f(ih)$$

El Operador Diferencia Dividida

Definimos al operador diferencia dividida como el cociente

$$\frac{\Delta}{h} = \frac{\Delta}{\Delta x}$$

Lo denominamos diferencia dividida porque no es más que el operador diferencia dividido entre h o si se prefiere la composición del operador diferencia con el operador multiplicar por $\frac{1}{h}$. Este operador es en realidad el análogo discreto del operador derivada.

Note que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta}{h} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = Df(x)$$

7.2 Cálculo de Diferencias

Ejemplo 7.1 *Halle la primera diferencia de* $x^2 - 3x$

Respuesta:

$$\begin{aligned} \Delta(x^2 - 3x) &= [(x+h)^2 - 3(x+h)] - [x^2 - 3x] \\ &= x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h - x^2 + 3x \\ &= 2xh + h^2 - 3h \\ &= (2x + h - 3)h \end{aligned}$$

•

Ejemplo 7.2 *Halle la primera diferencia de*

$$\frac{x}{x+1}$$

Respuesta:

$$\begin{aligned} \Delta \frac{x}{x+1} &= \frac{x+h}{x+h+1} - \frac{x}{x+1} \\ &= \frac{(x+h)(x+1) - x(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)} \\ &= \frac{h}{(x+h+1)(x+1)} \end{aligned}$$

•

Ejercicio 7.5 *Muestre que la $n-$ésima diferencia de un polinomio de grado n es una constante*

Ejercicio 7.6 *Halle la $n-$ésima diferencia de $f(x) = \frac{x}{x-1}$, y evalúela en $x = 0$*

Tabla de Diferencias

Una tabla de diferencias es una tabla en la que se listan las diferencias finitas de una función f evaluadas en $x, x+h, x+2h, \ldots$. Si en particular tomamos $h = 1$ y $x = 0$ para construir la tabla de diferencias:
Escribimos en una línea los valores

$$f(0) \quad f(1) \quad f(2) \quad f(3) \ldots$$

Luego escribimos en la siguiente línea y en los espacios entre cada par de términos consecutivos $f(i), f(i+1)$ sus diferencias $\Delta f(i) = f(i+1) - f(i)$. Repitiendo este proceso obtenemos la siguiente tabla de las diferencias finitas de la función f.

$$\begin{array}{cccccccccc}
f(0) & & f(1) & & f(2) & & f(3) & & f(4) & \ldots \\
 & \Delta f(0) & & \Delta f(1) & & \Delta f(2) & & \Delta f(3) & & \\
 & & \Delta^2 f(0) & & \Delta^2 f(1) & & \Delta^2 f(2) & & & \\
 & & & \ddots & & \ddots & & & &
\end{array}$$

Para el caso particular de $f(x) = x^4$ se tiene,

$$\begin{array}{cccccccccccc}
0 & & 1 & & 16 & & 81 & & 256 & & 625 & \ldots \\
 & 1 & & 15 & & 65 & & 175 & & 369 & & \\
 & & 14 & & 50 & & 110 & & 194 & & & \\
 & & & 36 & & 60 & & 84 & & & & \\
 & & & & 24 & & 24 & & & & & \\
 & & & & & 0 & & & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & & &
\end{array}$$

Luego, usando la fórmula (7.3) se tiene que

$$n^4 = \binom{n}{1} + 14\binom{n}{2} + 36\binom{n}{3} + 24\binom{n}{4}$$

Lo cual es una expresión de la función n^4 como combinación lineal de los coeficientes binomiales, que puede usarse junto con la fórmula de las sumas superiores (pag. 46) para hallar el valor de la suma $\sum_{1 \leq i \leq n} i^4$.

Funciones Factoriales

Si m es un entero no negativo, se definen las **funciones factoriales** como:

$$x^{(m)} = \begin{cases} x(x-h)(x-2h)\cdots(x-(m-1)h) & \text{si } m \geq 1 \\ 1 & \text{si } m = 0 \end{cases} \tag{7.4}$$

Además, se definen las funciones factoriales negativas como,

$$x^{(-m)} = \frac{1}{(x+h)(x+2h)\cdots(x+mh)} = \frac{1}{(x+mh)^{(m)}} \tag{7.5}$$

Dichas funciones reciben este nombre porque si $h = 1$ se tiene la función factorial. Es decir, son una generalización de la función factorial. Es importante observar que si h tiende a cero, $x^{(m)}$ tiende a x^m y $x^{(-m)}$ tiende a x^{-m}.

Una propiedad importantísima de estas funciones es que su diferencia es muy fácil de calcular, esto es, $\Delta x^{(m)} = mx^{(m-1)}h$, lo cual recuerda a la función x^m cuya derivada es mx^{m-1}. La prueba de este resultado se deduce inmediatamente de la definición de diferencia como sigue:

$$\begin{aligned} \Delta x^{(m)} &= (x+h)^{(m)} - x^{(m)} \\ &= (x+h)(x)(x-h)\cdots(x-(m-2)h) - x(x-h)\cdots(x-(m-1)h) \\ &= x(x-h)\cdots(x-(m-2)h)[(x+h)-(x-mh+h)] \\ &= x(x-h)\cdots(x-(m-2)h)\cdot mh \\ &= x^{(m-1)}mh \end{aligned}$$

El resultado también es cierto si el exponente es negativo. Probarlo.

Polinomios Factoriales y Números de Stirling

Definición 7.1 (Polinomio Factorial) *Un polinomio factorial de grado n es una expresión de la forma*

$$a_0x^{(n)} + a_1x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}x^{(1)} + a_n$$

donde los a_i son constantes reales, $a_0 \neq 0$ y n es un entero no negativo.

Todo polinomio se puede escribir como un polinomio factorial de idéntico grado, y viceversa, todo polinomio factorial se puede expresar como un polinomio. En particular usando la fórmula (7.4) se tiene que

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= x \\ x^{(2)} &= x(x-h) = x^2 - hx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^{(3)} &= x(x-h)(x-2h) = x^3 - 3hx^2 + 2h^2x \\
x^{(4)} &= x(x-h)(x-2h)(x-3h) = x^4 - 6hx^3 + 11h^2x^2 - 6h^3x \\
x^{(5)} &= x^5 - 10hx^4 + 35h^2x^3 - 50h^3x^2 + 24h^4x
\end{aligned}$$

En general, cada potencia factorial se puede expresar como

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} s_k(n) h^{n-k} x^k \tag{7.6}$$

donde los números $s_k(n)$ son los números de Stirling de primera especie. Se tiene entonces que si $h = 1$, los números de Stirling de primera clase son los coeficientes que permiten escribir las potencias factoriales como polinomios.

A continuación se muestra la expresión de las primeras potencias como polinomios factoriales

$$\begin{aligned}
x &= x^{(1)} \\
x^2 &= x^{(2)} + x^{(1)}h \\
x^3 &= x^{(3)} + 3x^{(2)}h + x^{(1)}h^2 \\
x^4 &= x^{(4)} + 6x^{(3)}h + 7x^{(2)}h^2 + x^{(1)}h^3 \\
x^5 &= x^{(5)} + 10x^{(4)}h + 25x^{(3)}h^2 + 15x^{(2)}h^3 + x^{(1)}h^4
\end{aligned}$$

Y en general, toda potencia se puede expresar como polinomio factorial mediante la siguiente fórmula

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S_k(n) h^{n-k} x^{(k)} \tag{7.7}$$

donde los números $S_k(n)$ son los números de Stirling de segunda especie. Se tiene entonces que si $h = 1$, los números de Stirling de segunda clase son los coeficientes que permiten escribir las potencias factoriales como polinomios.

Más adelante se dará un procedimiento que sirve para expresar cualquier polinomio como potencias factoriales usando división sintética.

Función Factorial Generalizada

Dada una función $f(x)$, para todo entero no negativo m se define su función factorial $[f(x)]^{(m)}$ como

$$[f(x)]^{(m)} = f(x)f(x-h)f(x-2h)\cdots f(x-(m-1)h) \quad m \neq 0 \tag{7.8}$$

$$[f(x)]^{(-m)} = \frac{1}{f(x+h)f(x+2h)\cdots f(x+mh)} \quad m \neq 0 \tag{7.9}$$

$$[f(x)]^{(-m)} = 1 \quad m = 0 \tag{7.10}$$

Todo polinomio se puede escribir como combinación lineal de funciones factoriales. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento a seguir para lograrlo.

Ejemplo 7.3 *Escribir* $x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ *como C.L. de* $x - 1$*, esto es, halle los coeficientes de*
$x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = a(x-1)^{(3)} + b(x-1)^{(2)} + c(x-1)^{(1)} + d$ *(*$h = 1$*)*

Respuesta:
Como el coeficiente d es el resto de dividir $x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ entre $x - 1$, c el resto de dividir el cociente de la división anterior entre $x - 2$ y así sucesivamente, usando división sintética se obtiene

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & & 1 & 3 & 0 \\ \hline & 1 & 3 & 0 & \boxed{1} \\ 2 & & 2 & 10 & \\ \hline & 1 & 5 & \boxed{10} & \\ 3 & & 3 & & \\ \hline & \boxed{1} & \boxed{8} & & \end{array}$$

Por lo tanto,

$$x^3 + 2x^2 - 3x + 1 = (x-1)^{(3)} + 8(x-1)^{(2)} + 10(x-1)^{(1)} + 1, \quad h = 1$$

•

Diferencias de Funciones Notables

De forma análoga al cálculo diferencial se tiene una serie de funciones notables de las cuales es conveniente conocer su primera diferencia. Mostraremos unas cuantas de tales funciones. Es conveniente que el lector use la definición del operador Δ para demostrar cada una de estas fórmulas.

(i) $\Delta[k] = 0$

(ii) $\Delta[x^{(m)}] = mx^{(m-1)}h$

(iii) $\Delta[(ax+b)^{(m)}] = m(ax+b)^{(m-1)}ah$

(iv) $\Delta[b^x] = b^x(b^h - 1)$

(v) $\Delta[e^{ax}] = e^{ax}(e^{ah} - 1)$

(*vi*) $\Delta[\ln x] = \ln(1 + h/x)$

(*vii*) $\Delta[\log_b x] = \log_b(1 + h/x)$

(*viii*) $\Delta[\operatorname{sen} ax] = 2\operatorname{sen}(ah/2)\cos a(x + h/2)$

(*ix*) $\Delta[\cos ax] = -2\operatorname{sen}(\frac{ah}{2})\operatorname{sen} a(x + h/2)$

Reglas para el Cálculo de Diferencias

A continuación mostraremos unas cuantas reglas útiles para el cálculo de diferencias de funciones compuestas. Las mismas son las análogas a las del cálculo diferencial.

(*i*) $\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$

(*ii*) $\Delta[kf(x)] = k\Delta f(x)$, k constante

(*iii*) $\Delta[f(x)g(x)] = f(x)\Delta g(x) + g(x + h)\Delta f(x)$

(*iv*) $\Delta[\frac{f(x)}{g(x)}] = \frac{g(x)\Delta f(x) - f(x)\Delta g(x)}{g(x)g(x+h)}$

Ejercicio 7.7 *Dé ejemplos de funciones para las cuales es cierto que* $\Delta[f(x)]^{(m)} = m[f(x)]^{(m-1)}\Delta f(x)$, *y de funciones para las cuales es falso.*

Para finalizar esta sección presentaremos dos fórmulas que son en ocasiones muy útiles.

Fórmula de Gregory-Newton

Es el equivalente discreto de la fórmula de la serie de Taylor

$$f(x) = f(a) + \frac{\Delta f(a)}{h}\frac{(x-a)^{(1)}}{1!} + \frac{\Delta^2 f(a)}{h^2}\frac{(x-a)^{(2)}}{2!} + \cdots + \frac{\Delta^n f(a)}{h^n}\frac{(x-a)^{(n)}}{n!} + R_n \tag{7.11}$$

donde la cola de la serie, R_n viene dada por

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{(n+1)}}{(n+1)!} \tag{7.12}$$

con ξ entre a y x.

Al igual que en el caso de la serie de Taylor si f es un polinomio de grado d la suma (7.11) tiene máximo los primeros $d + 1$ términos porque la $d + 1$-ésima diferencia de un polinimio de grado d es cero al igual que su $d + 1$-ésima derivada.

Regla de Leibnitz

La regla de Leibnitz permite obtener la $n-$ésima diferencia finita del producto de dos funciones.

$$\Delta^n[fg] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\Delta^k f)(\Delta^{n-k} E^k g) \tag{7.13}$$

Esta es una generalización de la regla de la diferencia de un producto. Su prueba se deja como ejercicio.

Ejemplo 7.4 *Use la regla de Leibnitz para hallar la $n-$ésima diferencia finita de $f(x) = x^2 2^x$ con $h = 1$.*

Respuesta:

$$\begin{aligned}
\Delta^n[x^2 2^x] &= x^2(\Delta^n 2^x) + \binom{n}{1}(\Delta x^2)(\Delta^{n-1} E 2^x) + \binom{n}{2}(\Delta^2 x^2)(\Delta^{n-2} E^2 2^x) + \cdots \\
&= x^2 2^x + \binom{n}{1}(2x+1)2^{x+1} + \binom{n}{2}(2)2^{x+2} \\
&= 2^x(x^2 + 2(2x+1)\binom{n}{1} + 8\binom{n}{2})
\end{aligned}$$

•

Nótese que la función $f(x) = 2^x$ es su propia diferencia si $h = 1$, esto es, $\Delta 2^x = 2^x$ y además como $\Delta 2^{x+a} = 2^{x+a}$, ¿por qué?. Esto es, la función $f(x) = 2^x$ se comporta como la función $f(x) = e^x$ en el cálculo diferencial.

Ejercicio 7.8 *Use la regla de Leibnitz para hallar la $n-$ésima diferencia finita de (a) $f(x) = x^2 H_x$ y (b) $f(x) = x^{(3)} 2^x$. ($h = 1$).*

7.3 Problemas

1. Demuestre que los operadores Δ y E son lineales y conmutan

2. Evalúe las siguientes expresiones

   (a) $E(E-1)(E-2)(2^x+x-1)$ (b) $(\Delta+1)(\Delta-1)(x^2-1)$
   (c) $(E+2)(2\,\mathrm{sen}\,2x)$ (d) $(\Delta-1)(E+2)(x2^x)$

3. Encuentre la primera diferencia finita de:

   (a) $3x^{(3)}+2x^{(-2)}$ (b) $x2^{x+1}$
   (c) $2x^5-x+2$ (d) $\frac{\mathrm{sen}\,2x}{x+1}$

4. Exprese como funciones factoriales

   (a) $3x^4-2x^2+4$
   (b) $(2x+3)(2x+5)(2x+7)$
   (c) $\frac{2}{(3x-2)(3x+1)(3x+4)(3x+7)}$
   (d) $\frac{x^2+1}{(x+2)(x+4)(x+6)}$
   (e) $\frac{2x-1}{(2x+1)(2x+5)(2x+7)}$

5. Use las fórmulas de factorización siguientes

$$\begin{aligned} \mathrm{sen}\,x-\mathrm{sen}\,y &= 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ \cos x-\cos y &= -2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right) \end{aligned}$$

   para hallar las primeras diferencias de $\mathrm{sen}\,ax$ y $\cos ax$

6. Los números de Stirling de segunda especie cuentan el número de particiones de un $n-$conjunto en k bloques. Otra manera de definirlos es como los coeficientes de la expresión de x^n como potencias factoriales de $x^{(k)}$, esto es:

$$x^n=\sum_{k=1}^{n}S_k(n)x^{(k)}$$

   Exprese x^5 como potencias factoriales para hallar cuántas particiones en $1,2,3,4,5$ bloques tiene un conjunto de 5 elementos. ¿Cuánto vale el quinto número de Bell, B_5?

7. Si $f(x)$ es un polinomio como, por ejemplo, $f(x) = x^4 + 3x - 1$ use la fórmula de Gregory-Newton para hallar una representación del mismo, en potencias de $x - 1$

8. Use la fórmula de Gregory-Newton para probar que la $n-$ésima diferencia de un polinomio de grado n es $a_0 n! h^n$

9. Use la Regla de Leibnitz para determinar la $n-$ésima diferencia de $x^2 a^x$

10. Halle la $n-$ésima diferencia de las siguientes funciones con $h = 1$

    (a) $\frac{1}{2x+1}$ (b) $2^x x^3$ (c) $x2^x$
    (d) H_n (e) x^n (f) $\frac{1}{(x+1)(x+2)}$

11. Pruebe las fórmulas de la diferencia del producto y del cociente de dos funciones.

12. Use la fórmula $x^n = \sum_{k=1}^{n} S_k(n) x^{(k)}$ para deducir una recurrencia entre los números de Stirling de segunda clase.

13. Pruebe que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(k) = (-1)^n \Delta^n f(0) \ .$$

14. Use el ejercicio anterior para probar que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{2^n n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$$

7.4 Cálculo de Sumas

Definición 7.2 (Inverso de un Operador) *Dado un operador A diremos que A tiene inverso y lo denotaremos por A^{-1} si se cumple que $AA^{-1} = A^{-1}A = 1$, donde 1 es el operador identidad.*

Por ejemplo, el inverso del operador elevar al cubo, $[]^3$, es el operador extraer la raíz cúbica, $\sqrt[3]{}$. Ejemplos de operadores lineales con inverso son el operador multiplicación por la constante k distinta de cero, cuyo inverso es $\frac{1}{k}\cdot$—dividir por k. El operador sumar una constante, $k+$, cuyo inverso es $-k$, restar la constante k. Es claro que el operador identidad es invertible. El inverso del operador E es E^{-1} que significa $E^{-1}f(x) = f(x-h)$.

Dado que el conjunto de los operadores lineales $\mathcal{L}(V)$ forman un anillo con identidad cabe preguntarse si los operadores Δ y $\frac{\Delta}{h}$ tienen inverso.

Teorema 7.1 *F_1 y F_2 tienen la misma diferencia si y sólo si son iguales, salvo por una función periódica $c(x)$ de período h, esto es*

$$F_1 = F_2 + c(x)$$

con $c(x+h) = c(x)$

Prueba: ($\Rightarrow$) Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ tienen la misma diferencia veamos que difieren a lo sumo en una función periódica de período h, esto es, que $F_1(x) - F_2(x)$ es periódica de período h. Sean F_1 y F_2 tales que $\Delta F_1(x) = \Delta F_2(x)$, si definimos $c(x) = F_1(x) - F_2(x)$ se tiene que

$$\Delta c(x) = \Delta(F_1 - F_2) = \Delta F_1 - \Delta F_2 = 0$$

lo cual implica que $\Delta c(x) = c(x+h) - c(x) = 0$ y por consiguiente que $c(x+h) = c(x)$, como queríamos demostrar.
($\Leftarrow$) En el otro sentido, si $F_1 = F_2 + c(x)$ se tiene que $\Delta F_1 = \Delta F_2 + \Delta c(x)$, pero como $c(x)$ es periódica de período h se tiene que $c(x+h) - c(x) = 0$ y por lo tanto $\Delta F_1 = \Delta F_2$. □

Esto parte al conjunto de las funciones de interés en clases de equivalencias de manera natural. F y G están en la misma clase si $\Delta F = \Delta G$, o equivalentemente si F y G difieren sólo en una función periódica de período h. Recuerde que al conjunto de estas clases de equivalencia lo denominamos conjunto cociente. En lo que sigue, cuando nos refiramos a una función nos estaremos refiriendo a su clase de equivalencia.

Dada $F(x)$ y $f(x)$ tales que

$$\frac{\Delta}{h}F(x) = f(x)$$

o equivalentemente

$$\Delta F(x) = f(x)h$$

por la definición de inverso $(\frac{\Delta}{h})^{-1}$ debe ser tal que

$$F(x) = (\frac{\Delta}{h})^{-1} f(x) \qquad (F(x) = \Delta^{-1} f(x)h)$$

Además, si denotamos por Σ al inverso de Δ y tomamos en cuenta que el operador Δ no es inyectivo, esto es, que existen infinitas funciones F de las cuales f es su diferencia, se tiene que $\Delta^{-1} f(x)h$ representa, en realidad, a un conjunto de funciones que son iguales, salvo por una función de período h. Por consiguiente, formalmente hablando debemos decir que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, esto es, si $\Delta F(x) = f(x)h$ entonces

$$\sum f(x)h = F(x) + c(x) \tag{7.14}$$

donde $c(x)$ es una función periódica de período h. Llamaremos a Σ el operador suma y a $\sum f(x)h$ la suma indefinida de $f(x)$. El proceso de hallar la suma se denominará sumación. Observe que Δ/h y $\sum(\quad)h$ son operadores inversos.

Nótese, que el operador $\sum$ es un operador lineal, esto es, tiene las siguientes propiedades:

(i) $\sum [f(x) + g(x)]h = \sum f(x)h + \sum g(x)h$

(ii) $\sum kf(x)h = k \sum f(x)h \quad k$ constante

(Se omitieron las funciones periódicas)

Sumación de Funciones Notables

A continuación se da una lista de las **sumas indefinidas** de las funciones notables, esto es, de las funciones a las que con mayor frecuencia hay que determinarle su suma. Es conveniente que el lector demuestre cada una de estas fórmulas. Más adelante daremos la demostración de algunas de ellas. Por comodidad se omitieron las funciones periódicas.

(i) $\sum k = \frac{kx}{h}$

(ii) $\sum x^{(m)} = \frac{x^{(m+1)}}{(m+1)h} \qquad m \neq -1$

(iii) $\sum x^{(-1)} = \sum \frac{1}{x+h} = \frac{\Gamma'(\frac{x}{h}+1)}{h\Gamma(\frac{x}{h}+1)}$
La función Gamma, Γ, se definirá más adelante.

(iv) $\sum (ax+b)^{(m)} = \frac{(ax+b)^{(m+1)}}{(m+1)ah}$ $\qquad m \neq -1$

(v) $\sum b^x = \frac{b^x}{b^h - 1}$

(vi) $\sum e^{ax} = \frac{e^{ax}}{e^{ah}-1}$

(vii) $\sum \operatorname{sen} ax = -\frac{\cos a(x-\frac{1}{2}h)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}ah}$

$(viii)$ $\sum \cos ax = \frac{\operatorname{sen} a(x-\frac{1}{2}h)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}ah}$

Ejemplo 7.5 *Halle la suma indefinida de* $\sum 2x^3 - 3x$ *con* $h = 2$

Respuesta: En primer lugar, como la función polinómica no es de las que pertenecen a la lista de las funciones notables hay que transformarla en funciones factoriales. Para ello usaremos el método de la división sintética.

	2	0	-3	0
0		0	0	0
	2	0	-3	$\boxed{0}$
2		4	8	
	2	4	$\boxed{5}$	
4		8		
	$\boxed{2}$	$\boxed{12}$		

Nótese que los incrementos se hicieron de 2 en 2 pues $h = 2$. Se tiene entonces que,

$$\begin{aligned}
\sum 2x^3 - 3x &= \sum 2x^{(3)} + 12x^{(2)} + 5x^{(1)} \\
&= 2\sum x^{(3)} + 12\sum x^{(2)} + 5\sum x^{(1)} \\
&= \frac{2x^{(4)}}{4 \cdot 2} + \frac{12x^{(3)}}{3 \cdot 2} + \frac{5x^{(2)}}{2 \cdot 2} + c(x)
\end{aligned}$$

Nótese que se usó tácitamente la linealidad del operador $\sum$ para picar la suma en tres partes y extraer las constantes del símbolo de sumación. •

Ejemplo 7.6 *Halle la suma indefinida de*

(i) $\sum (3 \cdot 2^x + \frac{1}{x(x+h)})$

(*ii*) $\sum (x^{(-2)} + (2x+3)^{(1)})$

Respuesta: Usando la linealidad de $\sum$ y luego las fórmulas notables se tiene que

$$\begin{aligned} \sum (3 \cdot 2^x + \frac{1}{x(x+h)}) &= 3\sum 2^x + \sum (x-h)^{(-2)} \\ &= 3\frac{2^x}{2^h - 1} + \frac{(x-h)^{(-1)}}{-1 \cdot h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum (x^{(-2)} + (2x+3)^{(1)}) &= \sum x^{(-2)} + \sum (2x+3)^{(1)} \\ &= \frac{x^{(-1)}}{-1 \cdot h} + \frac{(2x+3)^{(2)}}{2 \cdot 2 \cdot h} \end{aligned}$$

•

Ejercicio 7.9 *Halle las siguientes sumas indefinidas*

(*a*) $\sum x^2, \quad h = 2$	(*b*) $\sum \frac{x-2}{x(x+3)(x+6)}, \quad h = 3$
(*c*) $\sum (2x+1)^{(2)}, \quad h = 1$	(*d*) $\sum 2 \cdot 3^x, \quad h = 2$

7.4.1 Sumas Definidas

El objetivo principal de este capítulo es obtener un procedimiento riguroso para determinar el valor exacto de sumas finitas (sumas definidas).

El teorema que presentamos a continuación es el responsable de que esto lo podamos lograr, dicho teorema se conoce como teorema fundamental del cálculo de sumas porque, en efecto, sin él esto no sería posible.

Teorema 7.2 (Teorema Fundamental del Cálculo de Sumas)

$$\sum_{a}^{a+(n-1)h} f(x) = \Delta^{-1} f(x)\Big|_a^{a+nh} \tag{7.15}$$

Prueba: Si f es sumable existe F tal que $\Delta F(x) = f(x)$. Por consiguiente, $F(x+h) - F(x) = f(x)$. Luego la suma siguiente es una suma telescópica

$$\sum_{a}^{a+(n-1)h} f(x) = \sum_{a}^{a+(n-1)h} (F(x+h) - F(x))$$

$$\begin{aligned} &= F(a+h) - F(a) + F(a+2h) - F(a+h) + \cdots + \\ &\quad F(a+nh) - F(a+(n-1)h) \\ &= F(a+nh) - F(a) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 7.7 *Halle la siguiente suma definida* $\sum_{i=1}^{n} 2^i$

Respuesta: Por el Teorema fundamental se tiene que

$$\sum_{1}^{n} 2^x = 2^x\big|_1^{n+1} = 2^{n+1} - 2^1$$

•

Nótese que se puede concluir inmediatamente que

$$\sum_{a}^{n} 2^x = 2^{n+1} - 2^a$$

Ejercicio 7.10 *Hallar las siguientes sumas definidas*

(a) $\sum_1^n (x^{(-2)} + 2x^{(-3)})$	*(b)* $\sum_1^n 2 \cdot 3^x$
(c) $\sum_1^n x^3$	*(d)* $\sum_1^n 1 - 2^{x-1}$

Teorema 7.3 (Sumación por Partes)

$$\sum f(x)\Delta g(x) = f(x)g(x) - \sum g(x+h)\Delta f(x) \tag{7.16}$$

Prueba: Sabemos del cálculo de diferencias que $\Delta[f(x)g(x)] = f(x)\Delta g(x) + g(x+h)\Delta f(x)$. Tomando operador inverso en ambos lados y usando la linealidad de $\sum$ se tiene

$$f(x)g(x) = \sum f(x)\Delta g(x) + \sum g(x+h)\Delta f(x)$$

De donde despejando se obtiene lo deseado,

$$\sum f(x)\Delta g(x) = f(x)g(x) - \sum g(x+h)\Delta f(x)$$

□

Otra presentación interesante del teorema es

$$\sum f(x)\Delta g(x) = f(x)g(x) - \sum E(g(x))\Delta f(x)$$

También ayuda a recordarlo

$$\sum u\Delta v = uv - \sum Ev\Delta u$$

por aquello de que, "Un día vi una vaca rayada vestida de..."

Así como el ejemplo obligado para explicar el teorema de integación por partes es $\int xe^x dx$, el ejemplo obligado para presentar el teorema de sumación por partes es $\sum xb^x$.

Ejemplo 7.8 *Use el teorema de sumación por partes para hallar la siguiente suma definida*

$$\sum_1^n x2^x$$

Respuesta: Tomando $u = x$ y $\Delta v = 2^x$ sale que $\Delta u = 1$, $v = 2^x$, y $Ev = 2^{x+1}$. Por consiguiente

$$\sum x2^x = x2^x - \sum 1 \cdot 2^{x+1} = x2^x - 2^{x+1}$$

Luego, por el teorema fundamental se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_1^n x2^x &= x2^x - 2^{x+1}\Big|_1^{n+1} \\
&= [(n+1)2^{n+1} - 2^{n+2}] - [2-4] \\
&= (n-1)2^{n+1} + 2
\end{aligned}$$

•

Ejercicio 7.11 *Halle las siguientes sumas usando el teorema de sumación por partes.*

(a) $\sum_1^n x^2 2^x$	*(b)* $\sum_1^n (3x-2)3^x$
(c) $\sum_1^n x \operatorname{sen} \pi x$	*(d)* $\sum_1^n xa^{x-1}$

Transformada de Abel

La fórmula siguiente, que se conoce como transformada de Abel, en honor al matemático noruego Niels Henrick Abel, es útil en algunas situaciones

$$\sum_{i=1}^n f(i)g(i) = f(n+1)\sum_{i=1}^n g(i) - \sum_{i=1}^n \Delta f(i) \sum_{j=1}^i g(j) \tag{7.17}$$

Esta fórmula se puede probar llamando $g(i) = \Delta h(i)$ y usando el teorema de sumación por partes y el teorema fundamental. A continuación mostramos un ejemplo de la aplicación de dicha fórmula.

Ejemplo 7.9 *Use la transformada de Abel para hallar una fórmula cerrada de*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}.$$

Respuesta: Tomando $f(i) = i$ y $g(i) = (\frac{1}{2})^i$ sale que,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} &= \sum_{i=1}^{n} i \left(\frac{1}{2}\right)^i \\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i - \sum_{i=1}^{n} 1 \sum_{j=1}^{i} \left(\frac{1}{2}\right)^j
\end{aligned}$$

Pero como,

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \left.\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^i}{\frac{1}{2}-1}\right|_1^{n+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{-\frac{1}{2}} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^1}{-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Se tiene que,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} &= (n+1)\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - \sum_{i=1}^{n} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^i \\
&= (n+1)\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - n + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i \\
&= (n+1)\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - n + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
&= (n+2)\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] - n
\end{aligned}$$

•

Ejercicio 7.12 *Pruebe la fórmula de Abel*

Ejercicio 7.13 *Use la tranformada de Abel para hallar las siguientes sumas*

(a) $\sum_1^n (k+2)2^k$ *(b)* $\sum_1^n k^3$ *(c)* $\sum_1^n k^2 a^k$

Sumas de la forma $\sum \beta^x P(x)$

Ahora nos dedicaremos a hallar una fórmula que permita calcular sumas de la forma

$$\sum \beta^k P(k) \qquad \beta \neq 1$$

en base a las diferencias de $P(k)$.
Para toda $F(x)$ se tiene que,

$$\begin{aligned}
\Delta\beta^k F(k) &= \beta^{k+1}F(k+1) - \beta^k F(k) \\
&= \beta^{k+1}EF(k) - \beta^k F(k) \\
&= \beta^k(\beta E - 1)F(k)
\end{aligned}$$

Si $P(k) = (\beta E - 1)F(k)$, entonces $F(k) = \frac{P(k)}{\beta E - 1}$ y además $\beta^k(\beta E - 1)F(k) = \beta^k P(k)$ lo que implica que $\Delta\beta^k F(k) = \beta^k P(k)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\Delta^{-1}[\beta^k P(k)] &= \Delta^{-1}[\Delta\beta^k F(k)] \\
&= \beta^k F(k) \\
&= \beta^k \frac{1}{\beta E - 1} P(k) \\
&= \beta^k \frac{1}{\beta(\Delta + 1) - 1} P(k) \\
&= \frac{\beta^k}{\beta - 1} \frac{1}{\beta(1 + \Delta) - 1} P(k) \\
&= \frac{\beta^k}{\beta - 1} \frac{1}{\frac{\beta(1+\Delta)-1}{\beta - 1}} P(k) \\
&= \frac{\beta^k}{\beta - 1} \frac{1}{\frac{\beta\Delta}{\beta-1} + 1} P(k) \\
&= \frac{\beta^k}{\beta - 1} \left[1 - \frac{\beta\Delta}{\beta - 1} + \frac{\beta^2\Delta^2}{(\beta - 1)^2} - \cdots\right] P(k)
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\sum \beta^k P(k) = \frac{\beta^k}{\beta - 1} \left[1 - \frac{\beta\Delta}{\beta - 1} + \frac{\beta^2\Delta^2}{(\beta - 1)^2} - \cdots\right] P(k) \tag{7.18}$$

Esta fórmula es particularmente útil cuando $P(k)$ es un polinomio de grado d porque en dicho caso las diferencias Δ^i con $i \geq d$ son todas nulas, y la suma es una suma finita.

Ejemplo 7.10 *Use la fórmula anterior para evaluar* $\sum_1^n k^2 2^k$

Respuesta: Como k^2 es un polinomio de grado 2 basta con calcular las diferencias de orden 1 y 2 de k^2, esto es,

$$\Delta k^2 = (k+1)^2 - k^2 = 2k+1$$

$$\Delta^2 k^2 = \Delta(2k+1) = 2(k+1)+1-(2k+1) = 2$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\sum k^2 2^k &= \frac{2^k}{2-1}\left[1 - \frac{2\Delta}{2-1} + \frac{2^2\Delta^2}{(2-1)^2} - \cdots\right] k^2 \\
&= 2^k[k^2 - 2(2k+1) + 2^2 \cdot 2] \\
&= 2^k[k^2 - 4k + 6]
\end{aligned}$$

Finalmente, usando el Teorema Fundamental del Cálculo de Sumas se tiene que,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 2^k &= 2^k[k^2 - 4k + 6]\Big|_1^{n+1} \\
&= 2^{n+1}[(n+1)^2 - 4(n+1) + 6] - 2^1[1 - 4 + 6] \\
&= 2^{n+1}[(n+1)^2 - 4(n+1) + 6] - 6 \\
&= 2^{n+1}(n^2 - 2n + 3) - 6
\end{aligned}$$

•

Ejercicio 7.14 *Use la fórmula (7.18) para evaluar las siguientes sumas*

(a) $\sum_1^n 2^k(2k^2 - 3k + 1)$ *(b)* $\sum_1^n k^3 3^k$ *(c)* $\sum_1^n k^4 2^k$

Conmutatividad de Σ con D y $\int$

Puede probarse que los operadores $\frac{d}{dx}$ y $\int$ conmutan con el operador $\sum$, usando la definición del operador $\sum$ en base al operador Δ, y a la conmutatividad del operador Δ con los operadores $\frac{d}{dx}$ e $\int$. Esta afirmación puede formalizarse mediante los siguientes teoremas.

Teorema 7.4 *Si $f(x)$ y $F(x)$ son funciones tales que $\sum f(x) = F(x)$, entonces*

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\sum f(x) = \sum \frac{d}{dx} f(x)$$

Teorema 7.5 *Si $f(x,y)$ y $F(x,y)$ son funciones tales que $\sum f(x,y) = F(x,y)$, entonces*

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\sum f(x,y) = \sum \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$

Teorema 7.6 *Si $\sum f(x,y) = F(x,y)$ entonces*

$$\int F dy = \int \sum f dy = \sum \int f dy$$

Ejercicio 7.15 *Probar los tres teoremas anteriores.*

Puede usarse la conmutatividad del operador $\sum$ con los operadores D y $\int$ para evaluar ciertas sumas. La estrategia consiste en escribir la suma que se desea evaluar como una suma de dos o más variables que al evaluarlas en algún valor particular después de haber derivado o integrado den el resultado deseado. Veamos el siguiente ejemplo para terminar de entender el método.

Ejemplo 7.11 *Use la conmutatividad de los operadores D y Σ para evaluar la siguiente suma*

$$\sum_{i=1}^{n} i2^i$$

Respuesta: Considérese la suma $\sum 2^{\alpha x}$ porque al derivarla con respecto a α produce $\sum x2^{\alpha x} \ln 2$ que al evaluarla en $\alpha = 1$ nos da la suma que queremos evaluar.

Dicha suma es una suma notable cuya fórmula es:

$$\sum 2^{\alpha x} = \sum (2^\alpha)^x = \frac{(2^\alpha)^x}{(2^\alpha)^h - 1}$$

Derivando ambos lados de esta fórmula con respecto a α e intercambiando en el lado izquierdo los operadores suma y derivada se tiene

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\sum 2^{\alpha x} = \sum \frac{\partial}{\partial \alpha} 2^{\alpha x} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{2^{\alpha x}}{2^\alpha - 1}\right)$$

$$\sum x2^{\alpha x} \ln 2 = \frac{(2^\alpha - 1)x2^{\alpha x}\ln 2 - 2^{\alpha x}\cdot 2^\alpha \ln 2}{(2^\alpha - 1)^2}$$

Cancelando los $\ln 2$ y sustituyendo $\alpha = 1$ se tiene

$$\sum x2^x = x2^x - 2^{x+1} = (x-2)2^x$$

y finalmente por el Teorema Fundamental se tiene que,

$$\sum_{i=1}^{n} i2^i = (i-2)2^i\Big|_1^{n+1} = (n-1)2^{n+1} + 2$$

•

Tómese unos minutos para resolver los siguientes ejercicios que le aclararán un poco más el panorama.

Ejercicio 7.16 *Use la conmutatividad de $\sum$ con $\int$ y D para hallar las siguientes sumas:*

(*i*) $\sum_1^n k^2x^k$

(*ii*) $\sum_1^n \frac{x^k}{k}$

(*iii*) $\sum_1^n k \operatorname{sen} kx$

Ejercicio 7.17 *Use la fórmula de $\sum x^k$ para hallar una fórmula de $\sum_0^n kx^k$. Escriba el resultado para el caso $x = 2$*

7.4.2 Series o Sumas Impropias

Una suma impropia es una suma que tiene un número infinito de sumandos. Generalmente se le conoce como serie. El cálculo de las sumas impropias se basa en la siguiente igualdad:

$$\sum_{n=a}^{\infty} a_n = \lim_{b\to\infty} \sum_{n=a}^{b} a_n \tag{7.19}$$

Por lo tanto, para calcular una suma impropia se calcula la suma definida resultante de cambiar el límite superior por b y luego se halla el límite del resultado cuando b tiende a infinito.

Ejemplo 7.12 *Halle el valor de $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x(x+2)}$*

Respuesta:

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x(x+2)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{x=1}^{N} \frac{1}{x(x+2)}$$

Transformamos el término general de la suma para obtener una función factorial que sabemos es fácil de sumar. Para ello multiplicamos y dividimos por $x+1$.

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{x+1}{x(x+1)(x+2)}$$

Escribimos el numerador como un polinomio factorial

$$x+1 = a(x+2)+b$$

para obtener que $a=1$ y $b=-1$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x(x+2)} &= \frac{x+1}{x(x+1)(x+2)} \\
&= \frac{(x+2)-1}{x(x+1)(x+2)} \\
&= \frac{(x+2)}{x(x+1)(x+2)} - \frac{1}{x(x+1)(x+2)} \\
&= (x-1)^{(-2)} - (x-1)^{(-3)}
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sum_{1}^{N} \frac{1}{x(x+2)} &= \sum_{1}^{N} (x-1)^{(-2)} - (x-1)^{(-3)} \\
&= \sum_{1}^{N} (x-1)^{(-2)} - \sum_{1}^{N} (x-1)^{(-3)} \\
&= [\frac{(x-1)^{(-1)}}{(-1)(1)} - \frac{(x-1)^{(-2)}}{(-2)(1)}]\Big|_{1}^{N+1} \\
&= [-(N)^{(-1)} + \frac{(N)^{(-2)}}{2}] - [-0^{(-1)} + \frac{0^{(-2)}}{2}] \\
&= [-\frac{1}{N+1} + \frac{1}{2(N+1)(N+2)}] - [-1 + \frac{1}{(1)(2)(2)}] \\
&= [-\frac{1}{N+1} + \frac{1}{2(N+1)(N+2)}] + \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Y finalmente,

$$\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x(x+2)} = \lim_{N\to\infty} \sum_{x=1}^{N} \frac{1}{x(x+2)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{N\to\infty}[-\frac{1}{N+1}+\frac{1}{2(N+1)(N+2)}+\frac{3}{4}] \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

•

Comentarios sobre la función armónica. Si n es un entero positivo se define la función armónica

$$H_x = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{x}$$

de igual forma se definen los números armónicos. Observe que

$$\Delta H_x = \frac{1}{x+1} \quad \text{si} \quad h=1$$

y por consiguiente

$$\sum x^{(-1)} = \sum \frac{1}{x+1} = H_x$$

Esta función resulta ser la análoga discreta a la función logaritmo neperiano. Por lo tanto, las sumas como $\sum xH_x$ salen usando el teorema de sumación por partes........

Esta función aparece con cierta frecuencia en cálculos de complejidades de algoritmos....

Comentarios

Si $h=1$ y $f(x)=2^x$ se tiene que $\Delta f(x)=f(x)$, esto es,

$$\Delta 2^x = 2^{x+1}-2^x = 2^x(2-1) = 2^x.$$

Luego, 2^x es la función que es su propia diferencia finita. (Recuerde que $D\ e^x = e^x$). Esto nos dice que 2^x en el cálculo finito se comporta como e^x en el cálculo infinitesimal.

La Función Gamma

Con el fin de conseguir una función cuya diferencia sea $\frac{1}{x+h}$, se define la función Gamma de la siguiente manera:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \qquad x>0 \tag{7.20}$$

Nótese que, si $x > 0$

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x+1) &= \lim_{N\to\infty} \int_0^N t^x e^{-t} dt \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[t^x(-e^{-t})\Big|_0^N - \int_0^N x t^{x-1}(-e^{-t}) dt \right] \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[-N^x e^{-N} + x \int_0^N t^{x-1} e^{-t}) dt \right] \\
&= x \int_0^N x t^{x-1} e^{-t} dt \\
&= x\Gamma(x)
\end{aligned}
$$

Como $\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1} e^{-t} dt = 1$ la recurrencia indica que

$$
\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1 \cdot \Gamma(1) = 1, \\
\Gamma(3) &= 2 \cdot \Gamma(2) = 2, \\
\Gamma(4) &= 3 \cdot \Gamma(3) = 3!, \\
\Gamma(5) &= 4 \cdot \Gamma(4) = 4!,
\end{aligned}
$$

Lo que indica que si n entero positivo se tiene que

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad n \in Z, n > 0 \tag{7.21}$$

Se define

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(\frac{x}{h} + 1) = \tag{7.22}$$

$$\Delta \Psi(x) \quad = \quad \Delta D \ln \Gamma(x/h + 1)$$

7.5 Problemas Resueltos

1. Demuestre que el operador $\sum$ es lineal.
Respuesta: Debo probar que para todo par de funciones f y g y para toda constante k se cumple que:

(i) $\sum f + g = \sum f + \sum g$
(ii) $\sum k \cdot f = k \sum f$

Si $\sum f + g = H_1(x)$, entonces $f + g = \Delta H_1(x)$. Por otro lado, si $\sum f + \sum g = H_2$ entonces gracias a la linealidad de Δ se tiene que $f + g = \Delta H_2(x)$. Luego, como H_1 y H_2 tienen la misma diferencia se tiene que son iguales salvo por una función periódica de período h y, por lo tanto, $\sum (f+g) = \sum f + \sum g + c(x)$ o simplemente

$$\sum (f+g) = \sum f + \sum g \ .$$

(ii) Si $H_1 = \sum k \cdot f$, tenemos que $\Delta H_1 = k \cdot f$. Y si $H_2 = k \sum f$ se tiene que $\Delta H_2 = \Delta(k \sum f)$ y por la linealidad de Δ se tiene que $\Delta H_2 = k(\Delta \sum f) = k \cdot f$. Luego, como H_1 y H_2 tienen la misma diferencia son iguales salvo por una función de período h y

$$\sum k \cdot f = k \sum f \ .$$

2. Halle una fórmula para $\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}2\theta + \operatorname{sen}3\theta + \cdots + \operatorname{sen}n\theta$
Respuesta: Si tomamos $h = \theta$ se tiene que la suma es igual a $\sum_{x=\theta}^{n\theta} \operatorname{sen} x$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{x=\theta}^{n\theta} \operatorname{sen} x &= \Delta^{-1} senx\Big|_{\theta}^{(n+1)\theta} \\ &= -\frac{\cos(x - \frac{1}{2}\theta)}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\Bigg|_{\theta}^{(n+1)\theta} \\ &= \frac{\cos\frac{\theta}{2} - \cos((n+\frac{1}{2})\theta)}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} \ . \end{aligned}$$

3. Use sumación por partes para hallar $\sum xH_x$
Respuesta: Tomando $u = H_x$ y $\Delta v = x$ se tiene que $\Delta u = x^{(-1)}$ y que $v = \frac{x^{(2)}}{2}$, $Ev = \frac{(x+1)^{(2)}}{2}$. Luego, usando el teorema de sumación por partes se tiene que

$$\sum xH_x = \frac{x^{(2)}}{2}H_x - \sum \frac{(x+1)^{(2)}}{2}x^{(-1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^{(2)}}{2}H_x - \frac{1}{2}\sum x^{(-1+2)} \\
&= \frac{x^{(2)}}{2}H_x - \frac{1}{2}\sum x^{(1)} \\
&= \frac{x^{(2)}}{2}H_x - \frac{1}{4}x^{(2)} + c(x) \\
&= \frac{1}{2}x^{(2)}[H_x - \frac{1}{2}] + c(x) \ .
\end{aligned}$$

4. Evalúe la suma $\sum_1^n \frac{2x+1}{(x+1)^2x^2}$
   Respuesta: El truco está en observar que

$$\frac{2x+1}{(x+1)^2x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

y que por consiguiente $\frac{2x+1}{(x+1)^2x^2}$ es la primera diferencia finita de $-\frac{1}{x^2}$. Esto es, $\frac{2x+1}{(x+1)^2x^2} = \Delta(-\frac{1}{x^2})$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum_1^n \frac{2x+1}{(x+1)^2x^2} &= \sum_1^n \Delta(-\frac{1}{x^2}) = -\frac{1}{x^2}\Big|_1^{n+1} \\
&= -\frac{1}{(n+1)^2} + 1 = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \ .
\end{aligned}$$

Otra forma de resolver el problema es recordar que $H_x^{(k)} = \sum \frac{1}{(x+1)^k}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\sum_1^n \frac{2x+1}{(x+1)^2x^2} &= \sum_1^n \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} = H_{x-1}^{(2)} - H_x^{(2)}\Big|_1^{n+1} \\
&= H_n^{(2)} - H_{n+1}^{(2)} - (H_0^{(2)} - H_1^{(2)}) \\
&= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \ .
\end{aligned}$$

5. Halle un procedimiento sencillo que permita escribir un polinomio cualquiera $P(x)$ en potencias factoriales de $ax+b$. Justifique por qué funciona.
   Respuesta: Si $P(x)$ es de grado n entonces $P(x)$ se puede escribir como

$$P(x) = a_n(ax+b)^{(n)} + a_{n-1}(ax+b)^{(n-1)} + \cdots + a_1(ax+b)^{(1)} + a_0$$

Como para cada i se tiene que

$$(ax+b)^{(i)} = (ax+b)(ax-ah+b)\cdots(ax-a(n-1)h+b)$$

Sacando factor común a a en cada factor se tiene que

$$(ax+b)^{(i)} = a^i(x+\frac{b}{a})(x-h+\frac{b}{a})\cdots(x-(n-1)h+\frac{b}{a}) = a^i(x+\frac{b}{a})^{(n)}$$

Por consiguiente:

$$P(x) = a_n a^n(x+\frac{b}{a})^{(n)} + a_{n-1}a^{n-1}(x+\frac{b}{a})^{(n-1)} + \cdots + a_1 a^1(x+\frac{b}{a})^{(1)} + a_0$$

Si $c_i = a_i a^i$ se tiene que nuestro problema es equivalente a buscar los coeficientes de $P(x)$ como potencias de $(x+\frac{b}{b})$. Luego el procedimiento consiste en hallar los coeficientes c_i por división sintética y obtener los a_i como $a_i = \frac{c_i}{a^i}$.

6. Expresar $3x^3-2x+5$ como potencias factoriales de $(2x-1)$ con $h=1$.
Respuesta: Siguiendo el procedimiento descrito en el ejercicio anterior, aplicamos división sintética para hallar los coeficientes de la expresión de $P(x)$ como potencias de $(x-\frac{1}{2})$

	3	0	-2	5
1/2		3/2	3/4	-5/8
	3	3/2	-5/4	$\boxed{35/8}$
3/2		9/2	9	
	3	6	$\boxed{31/4}$	
5/2		15/2		
	$\boxed{3}$	$\boxed{27/2}$		

Los coeficientes buscados se obtienen dividiendo estos coeficientes entre 2^i para dar:

$$\begin{aligned} 3x^32-2x+5 &= \frac{3}{2^3}(2x-1)^{(3)} + \frac{27}{2\cdot 2^2}(2x-1)^{(2)} + \frac{31}{4\cdot 2}(2x-1)^{(1)} + \frac{35}{8} \\ &= \frac{3}{8}(2x-1)^{(3)} + \frac{27}{8}(2x-1)^{(2)} + \frac{31}{8}(2x-1)^{(1)} + \frac{35}{8} \end{aligned}$$

7. Halle el valor de: $\frac{3}{1\cdot 4\cdot 7} + \frac{5}{4\cdot 7\cdot 10} + \frac{7}{7\cdot 10\cdot 13} + \cdots$
Respuesta: El denominador del término general de la sucesión que se desea sumar se puede escribir como $k(k+3)(k+6)$ con $k = 1, 4, 7, 10, \ldots$, lo que implica que el paso es $h=3$. Nos falta representar el numerador en base a k. Para representar el numerador en base a k obsérvese que se incrementa de 2 en 2, mientras que k lo hace de 3 en 3. Para transformar el incremento de 3 en 3 en uno de 2 en 2 le restamos 1 a la k (para hacerla divisible por 3) y al resultado lo multiplicamos por $\frac{2}{3}$. Luego, el numerador queda como $3+\frac{2(k-1)}{3}$ o

equivalentemente $\frac{1}{3}(2k+7)$. Por consiguiente la sucesión que se desea sumar se puede representar por

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3}\frac{2k+7}{k(k+3)(k+6)} \qquad \text{con } h=3$$

Esta suma se puede resolver de varias formas, a saber:

- Separando en dos sumandos:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3}\sum \frac{2k}{k(k+3)(k+6)} + \frac{7}{k(k+3)(k+6)} \\ &= \frac{2}{3}\sum k^{(-2)} + \frac{7}{3}\sum (k-3)^{(-3)} \end{aligned}$$

- Escribiendo $2k+7$ como una función factorial de base $(k+6)$. En este caso esto se logra por simple inspección: $2k+7 = 2(k+6)-5$.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3}\sum \frac{2(k+6)}{k(k+3)(k+6)} + \frac{-5}{k(k+3)(k+6)} \\ &= \frac{2}{3}\sum (k-3)^{(-2)} - \frac{5}{3}\sum (k-3)^{(-3)} \end{aligned}$$

- Usar sumación por partes:

$$\frac{1}{3}\sum (2k+7)(k-3)^{(-3)}$$

También se puede expresar el término general de la suma deseada como

$$\frac{2x+1}{(3x-2)(3x+1)(3x+4)} \qquad x = 1,2,3,\ldots (h=1)$$

con lo cual la suma buscada es

$$\sum_{1}^{\infty} (2x+1)(3x-5)^{(-3)} \ .$$

Esta suma puede resolverse por cualquiera de los métodos antes expuestos, pero como $h = 1$ usaremos la trasformada de Abel para ilustrar el método. Si tomamos como $f(x) = 2x+1$ y como $g(x) = (3x-5)^{(-3)}$, entonces $\Delta f(x) =$ y $\sum g(x) = \frac{(3x-5)^{(-2)}}{-2\cdot 3\cdot 1}$. Luego, aplicando la fórmula de la transformada de Abel

$$\begin{aligned}
&\sum_{1}^{n}(2x+1)(3x-5)^{(-3)}\\
&= (2(n+1)+1)\frac{(3x-5)^{(-2)}}{-6}\Bigg|_{1}^{n+1} - \sum_{1}^{n} 2\left[\frac{(3j-5)^{(-2)}}{-6}\Bigg|_{1}^{x+1}\right]\\
&= (2n+3)\frac{1}{-6(3x-2)(3x+1)}\Bigg|_{1}^{n+1} + \frac{1}{3}\sum_{1}^{n}\left[\frac{1}{(3j-2)(3j+1)}\Bigg|_{1}^{x+1}\right]\\
&= \frac{(2n+3)}{-6}\left[\frac{1}{(3n+1)(3n+4)} - \frac{1}{1\cdot 4}\right] + \frac{1}{3}\sum_{1}^{n}\left[\frac{1}{(3x+1)(3x+4)} - \frac{1}{1\cdot 4}\right]\\
&= -\frac{(2n+3)}{6(3n+1)(3n+4)} + \frac{n}{12} + \frac{1}{8} + \frac{1}{3}\sum_{1}^{n}(3x-2)^{(-2)} - \frac{n}{12}\\
&= -\frac{(2n+3)}{6(3n+1)(3n+4)} + \frac{1}{8} + \frac{1}{3}\,\frac{(3x-2)^{(-1)}}{-1\cdot 3\cdot 1}\Bigg|_{1}^{n+1}\\
&= -\frac{(2n+3)}{6(3n+1)(3n+4)} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9(3n+4)} + \frac{1}{36}\\
&= \frac{11}{72} - \frac{(12n+11)}{18(3n+1)(3n+4)}
\end{aligned}$$

Finalmente al tomar el límite cuando n tiende a infinito de esta suma se tiene el valor de la serie buscada

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{11}{72} - \frac{12n+11}{18(3n+1)(3n+4)}\right) = \frac{11}{72}\ .$$

8. Demuestre que

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{vEv}\ .$$

Respuesta: Usando la definición de diferencia tenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{u}{v}\right)(x) &= \frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}\\
&= \frac{v(x)u(x+h) - v(x+h)u(x)}{v(x+h)v(x)}\\
&= \frac{v(x)u(x+h) - v(x)u(x) + v(x)u(x) - v(x+h)u(x)}{v(x+h)v(x)}\\
&= \frac{v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)}{v(x)Ev(x)}
\end{aligned}$$

La tercera igualdad se obtuvo sumando y restando $v(x)u(x)$, y la última agrupando y usando la definición de Δ.

7.6 Problemas

1. Use las sumas notables para determinar los valores de las siguientes sumas indefinidas

   (a) $\sum x^{(-2)} + 2^{x-1}$ (b) $\sum x^3 - x + 1$
   (c) $\sum (3x-1)^{(2)}$ (d) $\sum 3^{x+2} - 2$

2. Halle el valor de $\sum_{0 \leq k \leq n} H_k/(k+1)(k+2)$.

3. Use división sintética para obtener un procedimiento que permita expresar un polinomio de grado n como potencias de $(x-a)$. Extienda dicho procedimiento para potencias de $(ax-b)$. Justifique su respuesta.

4. Use el teorema de sumación por partes para evaluar las siguientes sumas

   (a) $\sum_{x=1}^{n} (x-1)^{(2)} 2^x$ (b) $\sum_{x=1}^{n} 2^x \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} x$ (c) $\sum_{x=1}^{n} x e^x$
   (d) $\sum_{x=1}^{n} x \cos \pi x$ (e) $\sum_{x=1}^{n} (x^2 - 2x + 1) H_x$ (f) $\sum_{x=1}^{n} x^2 a^x$

5. Hallar el valor de la suma de los n primeros términos de cada una de las siguientes series

   (a) $1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + 5 \cdot 7 \cdot 9 + \cdots$
   (b) $1 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \cdots$
   (c) $\frac{1}{1\cdot3\cdot5} + \frac{1}{3\cdot5\cdot7} + \frac{1}{5\cdot7\cdot9} + \cdots$
   (d) $\frac{1}{1\cdot3\cdot5} + \frac{4}{3\cdot5\cdot7} + \frac{7}{5\cdot7\cdot9} + \cdots$
   (e) $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cdots$

6. Demuestre la transformada de Abel.

7. Use la transformada de Abel para calcular el valor de las siguientes sumas

   (a) $\sum_{k=1}^{n} (k-1)2^k$ (b) $\sum_{k=1}^{n} k^2$ (c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}$

8. Muestre que

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{sen}2\alpha} + \frac{1}{\operatorname{sen}4\alpha} + \frac{1}{\operatorname{sen}8\alpha} + \cdots + \frac{1}{\operatorname{sen}2^{n-1}\alpha} = \cot(\alpha/2) - \cot(2^{n-1}\alpha) .$$

9. Halle la suma indefinida $\sum H_x$ con $h = 1$.

10. Los números armónicos H_n se generalizan según la siguiente fórmula:

$$H_n^{(i)} = 1 + \frac{1}{2^i} + \frac{1}{3^i} + \cdots + \frac{1}{n^i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^i}.$$

A estos números se les denomina números armónicos de orden i. A $H_x^{(i)}$ también se le denomina función armónica de orden i. Demuestre que $\Delta H_x^{(i)} = \frac{1}{(x+1)^i}$ y halle $\sum H_x^{(i)}$.

11. Halle el valor de la siguiente suma: $\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 7\cdot 9} + \cdots$.

12. Halle el valor de cada una de las siguientes sumas impropias

(a) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots$
(b) $\frac{2}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{4}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{6}{5\cdot 7\cdot 9} + \cdots$
(c) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 4} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6} + \cdots$
(d) $\frac{2}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{4}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{8}{5\cdot 7\cdot 9} + \cdots$
(e) $\frac{2}{1\cdot 3} + \frac{4}{3\cdot 5} + \frac{6}{5\cdot 7} + \cdots$

13. Muestre que

(a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$
(b) $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots = 2$

14. Sume las series

(a) $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{(k+1)(k+3)}$
(b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{(k+2)(k+4)(k+6)}$
(c) $\sum_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{(2k+1)(2k+5)(2k+7)}$
(d) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)(2k+5)}$

15. Muestre que

$$\sum_{k=0}^{n} ka^k = \frac{a + (n+1)a^{n+1} + na^{n+2}}{(1-a)^2}, \quad \text{si} \quad a \neq 1$$

y concluya que

$$\sum_{k=0}^{\infty} ka^k = \frac{a}{(1-a)^2} \quad \text{si} \quad |a| < 1 \ .$$

16. Halle el valor de la siguiente suma:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3k^2 + 3k + 1}{(k+1)^3 k^3}$$

¡Absteneos!—Hay hombres nefastos que,
en lugar de resolver un problema, lo oscurecen
para todos los que se ocupan de él y le hacen
más difícil de resolver. El que no sepa dar en
el blanco, que se abstenga de tirar.
Federico Nietzsche. El viajero y su sombra.

Capítulo 8

Acotación y Comportamiento Asintótico

8.1 Acotación

Está claro que cuando investigamos un problema particular de conteo lo ideal es obtener el valor exacto de la cantidad en cuestión mediante una fórmula cerrada que nos permita con poco esfuerzo computacional calcular la cantidad deseada.

Sin embargo, en muchas situaciones, lo mejor que podemos obtener es una recurrencia que no sabemos resolver o una fórmula que involucra sumas y productos. En tales caso, tenemos que conformarnos con obtener una aproximación de la cantidad en cuestión. En este sentido podríamos conformarnos con expresiones como: $C(n)$ es siempre menor que..., Está entre tanto y cuanto..., Está mayorada por..., Es despreciable frente a..., Tiene el mismo orden de crecimiento que..., Es asintóticamente equivalente a..., etc, etc. A continuación precisaremos un poco estos términos.

Definición 8.1 (Acotamiento) *Se dice que una función $f(x)$ está acotada superiormente si existe una constante M tal que para toda x, $f(x) \leq M$, y se dice que $f(x)$ está acotada inferiormente si existe una constante m tal que $\forall x(m \leq f(x))$. A m y M, si existen, se llaman cotas inferior y superior de la función respectivamente. Si una función está acotada tanto inferior como superiormente se dice que está acotada.*

Extendiendo esta definición diremos que la función $M(x)$ es cota superior de la función $f(x)$ si para toda x se cumple que $f(x) \leq M(x)$ y que $m(x)$ es cota inferior de $f(x)$ si para toda x se tiene que $m(x) \leq f(x)$.

Para mayorar o minorar una función particular puede ser particularmente útil usar el principio de desigualdad (Si $f : A \to B$ es inyectiva, entonces $|A| \leq |B|$ y si es sobreyectiva, entonces $|A| \geq |B|$).

El siguiente ejemplo muestra como se puede acotar una función con el fin de tener una aproximación de la misma.

Ejemplo 8.1 *Halle una cota inferior y una cota superior al número de particiones de un conjunto de n elementos en k bloques; en otras palabras, mayorar los números de Stirling de segunda clase.*

Explicación: Sea $\Pi_k(n)$ el conjunto de las particiones de $[n]$ en k bloques. Para hallar una cota inferior de $|\Pi_k(n)| = S_k(n)$ consideremos el conjunto $A = \{f : [n] \to [k] / f(i) = i \text{ si } i \in [k]\}$ (Esto es, A contiene todas las funciones de $[n]$ en $[k]$ tales que restringidas a $[k]$ son la identidad). Se tiene que $|A| = k^{n-k}$, pues la imagen de $k < i \leq n$ puede ser cualquiera de los k elementos de $[k]$. Por lo tanto, la siguiente función es inyectiva

$$\begin{array}{ccl} A & \hookrightarrow & \Pi_k(n) \\ f & \mapsto & \pi_f \quad \text{(partición asociada)} \end{array}$$

y, en consecuencia,

$$k^{n-k} \leq S_k(n)$$

Por otro lado, para hallar una cota superior consideremos uno de los $k-$subconjuntos de $[n]$ que contienen al 1 al que denominaremos A_γ y sea $B_\gamma = \{f : [n] \to A_\gamma : f(i) = i \, \forall i \in A_\gamma\}$. Se tiene que $|B_\gamma| = k^{n-k}$ y hay $\binom{n-1}{k-1}$ de tales B_γ. Por lo tanto, si $B = \cup B_\gamma$ se tiene que $|B| = \binom{n-1}{k-1} k^{n-k}$ pues los B_γ son disjuntos (ninguna función coincide pues difieren en sus conjuntos de llegada). Además, como B contiene sólo funciones sobreyectivas de $[n] \to A_\gamma$ cada una de estas funciones induce una partición en k bloques, luego la función siguiente es sobreyectiva. (Justifíquelo.)

$$\begin{array}{ccl} B & \to & \Pi_k(n) \\ f & \mapsto & \pi_f \quad \text{(partición asociada)} \end{array}$$

y por lo tanto

$$k^{n-k} \leq |\Pi_k(n)| \leq \binom{n-1}{k-1} k^{n-k}$$

•

El proceso de acotar una función puede no ser fácil, y además la cota hallada puede ser burda, esto es, la cota superior puede estar muy por arriba de la realidad y/o la cota inferior puede estar muy por debajo. Si esto es todo lo que podemos conseguir, no nos queda más remedio "que tomarlo o dejarlo." Más vale saber algo que no saber nada.

8.2 Notaciones asintóticas:

Es posible que, en la fórmula que representa una función, haya términos despreciables para valores grandes de la variable independiente que al ser suprimidos nos permitan tener una expresión más sencilla de la función sin perder la información relevante que la misma proporciona. Esto justifica que tratemos de conseguir aproximaciones de una función en estudio para valores grandes de la variable indepediente x.

Cuando queremos describir el comportamiento de cierta función cuando x crece sin límites se suelen usar expresiones como: "$f(x)$ crece sin límites", "$f(x)$ se acerca a un valor dado sin alcanzarlo", "$f(x)$ tiende a cero", etc., etc. En cálculo acostumbramos decir: "f tiene por asíntota la recta $y = 2x + 1$ o la recta $y = 3$" para indicar que para valores muy grandes de x la función se acerca mucho a la recta en cuestión.

En la presente exposición consideraremos que las funciones en estudio son las funciones de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$, en otras palabras, son sucesiones de números reales. Diremos que una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tiende a L o tiene límite L cuando n tiende a infinito si para todo $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que si $n \geq n_0$, entonces $|f(n) - L| \leq \varepsilon$. De igual manera, diremos que f tiende a infinito cuando n tiende a infinito si para todo $M \geq 0$, existe n_0 tal que si $n \geq n_0$, entonces $|f(n)| \geq M$. En cada caso escribimos:

$$\lim_{n\to\infty} f(n) = L \qquad \lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$$

Note que una sucesión puede no tener límite finito ni infinito, por ejemplo, la sucesión $1, -1, 1, -1, \ldots$ no tiene límite.

Saber que una función tiende a un límite finito o infinito cuando n tiende a infinito no constituye una información muy precisa pues hay muchas funciones que tienden, por ejemplo, a infinito. Nuestro interés será precisar qué tan rápido tiende al límite. En el sentido de: tiende más rapido que, tiende tan rápido como, tiende menos rápido que.

En lo que sigue usaremos la palabra asintótica con una interpretación sutilmente diferente.... "f está asintóticamente dominada por g" para indicar que para n suficientemente grandes un múltiplo de g es mayor que f ...

o-chica

Para describir qué tan rápido crece una función definiremos la notación $o-$chica. La notación $o-$chica fue inventada por Edmund Landau como sigue:

$$f(n) = o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

y es esencialmente la misma definición inventada por Paul du Bois Reymond en 1871 y que establecía que

Edison inventó la luz eléctrica siete años después, en 1878

$$f(n) \prec g(n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

La notación $o-$chica, o equivalentemente, $\prec$, es transitiva e irreflexiva, por lo tanto, es un cuasiorden sobre el conjunto de las funciones, digamos, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Conviene tener en mente las siguientes observaciones sobre la notación o-chica o su equivalente $\prec$.

Observaciones

- La notación $f \prec g$ debe interpretarse como "f es asintóticamente despreciable frente a g", esto es, para n suficientemente grande, f se puede despreciar frente a g.

- $o(g)$ representa en realidad el conjunto de todas las funciones que al dividirlas entre g su límite al infinito es cero, esto es,

$$o(g) = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} / \lim_{n\to\infty} \frac{f}{g} = 0\}$$

- $f = o(g)$ debe interpretarse como $f \in o(g)$

- Una igualdad del estilo $o(g)o(f) = o(gf)$ debe interpretarse en un solo sentido $o(g)o(f) \subseteq o(gf)$

La siguiente proposición puede ser útil en el momento de decidir si una función es $o-$chica de otra.

Proposición 8.1 *Demuestre que si $g, h > 0$ crecen sin límite, entonces*

$$\ln(g(n)) \prec \ln(h(n)) \Longrightarrow g(n) \prec h(n)$$

Prueba: Si $\ln g \prec \ln h$ se tiene por definición que $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln g(n)}{\ln h(n)} = 0$. Debemos probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = 0$. En efecto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln \frac{g(n)}{h(n)}} = e^{\lim_{n\to\infty} (\ln g - \ln h)} = e^{-\infty} = 0$$

ya que como $\lim_{n\to\infty} h = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln g(n)}{\ln h(n)} = 0$ por hipótesis.

$$\lim_{n\to\infty} (\ln g - \ln h) = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln g - \ln h)}{\ln h} \ln h = -1 \cdot \infty = -\infty$$

□

Alerta: el recíproco es falso ($g(n) \prec h(n) \not\Longrightarrow \ln(g(n)) \prec \ln(h(n))$), considere $g(n) = n$ y $h(n) = n \ln n$, claramente $g \prec h$ pues

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$$

pero como $\ln g(n) = lnn$ y $\ln h = \ln(n \ln n) = \ln n + \ln \ln n$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln n + \ln \ln n} = 1$$

Ejemplo 8.2 *Demuestre que*

1. $\log \log n \prec \log n$
2. $n^c = o(n^{\log n}) \quad c > 1$

Explicación: (a) Aplicando la regla de L'Hospital

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \log n}{\log n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\frac{1}{n}\frac{1}{\ln 10}}{\log n}}{\frac{1}{n}\frac{1}{\ln 10}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} = 0$$

(b) Queremos probar que $n^c \prec n^{\log n}$. Por la proposición anterior basta probar que $c \ln n \prec \log n \ln n$. Esto último, en efecto, es cierto pues

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c \ln n}{\log n \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c}{\log n} = 0$$

•

Escala de crecimiento

Si $0 \leq \varepsilon < 1 < c$, efectuando las comparaciones adecuadas se puede construir la siguiente escala de comparación, que puede ser particularmente útil para decidir qué lugar ocupa una función en estudio en la misma y tener una idea de qué tan rápido crece.

$$1 \prec \log\log n \prec \log n \prec n^{\varepsilon} \prec n \prec n^{c} \prec n^{\log n} \prec c^{n} \prec n^{n} \prec c^{c^{n}}$$

En esta escala todas las funciones, salvo la función 1, crecen sin límite. Tomando los inversos se puede construir otra escala en la cual todas las funciones tiendan a cero.

Ejercicio 8.1 *Demuestre que*

(*i*) $o(o(g)) = o(g)$

(*ii*) $\lambda(o(g)) = o(g)$

(*iii*) $o(g_1) + o(g_2) = o(\max\{g_1, g_2\})$

(*iv*) $o(g_1)o(g_2) = o(g_1 g_2)$

(*v*) *Si* $\lambda > 0$ *entonces* $|o(g)|^{\lambda} = o(g^{\lambda})$

Equivalencia y Proporcionalidad Asintótica

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f}{g} = 1$ decimos que f y g son asintóticamente equivalentes o asintóticamente iguales y escribimos $f \sim g$. Y si $\lim_{n\to\infty} \frac{f}{g} = k$ decimos que f y g son asintóticamente proporcionales y escribimos $f \sim k \cdot g$

Ejemplo 8.3 *Demuestre que*

$$f \sim g \Longleftrightarrow f = g + o(g)$$

Explicación: ($\Rightarrow$) Si $f \sim g$, se tiene en base a la definición que $\lim_{n\to\infty} \frac{f}{g} = 1$ y debemos probar que $f = g + o(g)$ o equivalentemente que $f - g = o(g)$, lo cual significa que $\lim_{n\to\infty} \frac{f-g}{g}$ debe dar cero.
En efecto se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f-g}{g} = \lim_{n\to\infty} \frac{f}{g} - \lim_{n\to\infty} \frac{g}{g} = 1 - 1 = 0$$

pues por hipótesis $\lim_{n\to\infty} \frac{f}{g} = 1$.
($\Leftarrow$) Supongamos que $f = g + o(g)$ y queremos probar que $f \sim g$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f}{g} = \lim_{n\to\infty} \frac{g + o(g)}{g} = \lim_{n\to\infty} \frac{g}{g} + \lim_{n\to\infty} \frac{o(g)}{g} = 1 + 0 = 1$$

Por lo tanto $f \sim g$ •

Ejercicio 8.2 *Demuestre que*

$$f \sim k \cdot g \Longleftrightarrow f = k \cdot g + o(g)$$

O-grande

Definición 8.2 (O-grande) *Se dice que f es O-grande de g, y se escribe $f = O(g)$ ó $f(n) = O(g(n))$, si existe una constante positiva k y un número natural n_0, tales que para todo natural n mayor que n_0 se tiene que $|f(n)| \leq k|g(n)|$. Simbólicamente,*

$$f = O(g) \Longleftrightarrow (\exists k > 0, n_0)(\forall n > n_0(|f(n)| \leq k|g(n)|))$$

Si $f = O(g)$, decimos que f está asintóticamente dominada por g. Deben tenerse en cuenta las siguientes observaciones sobre la notación O-grande

Observaciones

- O(g) representa el conjunto de todas las funciones que están asintóticamente acotadas por un múltiplo constante de g, i.e.

$$O(g) = \{h : I\!R \to I\!R : (\exists k, x_0)(\forall x > x_0)(|h(x)| \leq k|g(x)|)\}$$

- $f = O(g)$ significa que $f \in O(g)$
- O-grande es transitiva y reflexiva, esto es

  (i) Si $f = O(g)$ y $g = O(h)$ entonces $f = O(h)$

  (ii) $g = O(g)$

- No se puede invertir el orden de una expresión como $n = O(n^2)$, porque lo que resulta no tiene sentido: $(O(n^2) = n)$. La expresión $\frac{1}{3}n^3 + O(n^2) = O(n^3)$ tiene sentido, pero deja de tenerlo si se invierte. Esto es equivalente a la igualdad del lenguaje: "Un perro es un animal", que deja de tener sentido si se invierte "Un animal es un perro."

- En una expresión del estilo $O(g_1)O(g_2) = O(g_1 g_2)$, sólo debe probarse la contención $\subseteq$

Ejercicio 8.3 *Demuestre que*

(*i*) $g = O(g)$

(*ii*) $O(O(g)) = O(g)$

(*iii*) $\lambda(O(g)) = O(g)$

(*iv*) $O(g_1) + O(g_2) = O(\max\{g_1, g_2\})$

(*v*) $O(g_1)O(g_2) = O(g_1 g_2)$

(*vi*) *Si* $\lambda > 0$, *entonces* $|O(g)|^\lambda = O(g^\lambda)$

Ejercicio 8.4 *Demuestre que si* $f = o(g)$, *entonces* $f = O(g)$

Ejemplo 8.4 *Demostrar que el número de comparaciones,* $C(n)$, *que hace el algoritmo de ordenamiento por intercambio dado por el código siguiente, cuando ordena un arreglo con* n *claves es* $O(n^2)$

```
for i:= 1 to n − 1 do
    for j:= i+1 to n do
        if a[i] ≤ a[j] then intercambia(a[i],a[j]);
```

Explicación: El algoritmo hace una comparación cada vez que se ejecuta el segundo **for** y este se ejecuta con j variando de $i+1$ hasta n, esto es, se ejecuta $\sum_{i+1\le j\le n} 1$ veces. Y como el primer for se ejecuta con i variando entre 1 y $n-1$ se tiene que

$$\begin{aligned} C(n) &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 1 = \sum_{i=1}^{n-1}(n-i-1+1) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} n - \sum_{i=1}^{n-1} i = n^2 - n - \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n^2-n}{2} \end{aligned}$$

Luego, como $\frac{n^2-n}{2} \le n^2$ usando $k=1$, se tiene que $C(n) = O(n^2)$ •

Ejercicio 8.5 *Determine el orden del algoritmo de multiplicación de matrices de* $n \times n$.

Si la función f a la cual pretendemos acotar es una función de varias variables, como por ejemplo, $f(n,m) = n^2 + m$, sólo tiene sentido decir que $f(n,m) = O(g(n,m))$ si existe n_0, m_0 y k, tales que si $n > n_0, m > m_0$ se cumple que $|f(n,m)| \leq k|g(n,m)|$. Pero hay que tener cuidado en ciertos casos, como por ejemplo: $f(n,m) = O(g(m))$ si existe m_0 y k tales que si $m > m_0$ se cumple que $|f(n,m)| \leq k|g(m)|$.

El siguiente ejemplo ilustra ciertos detalles sutiles que vale la pena tener en mente.

Ejemplo 8.5 *Hallar una aproximación asintótica de* $\sum_{k=0}^{n} [\binom{n}{k} + O(k)]$

Explicación: La expresión $\binom{n}{k} + O(k)$ representa tácitamente a todas las funciones de las dos variables n, k de la forma $\binom{n}{k} + f(n,k)$ para las que existe una constante C y k_0 tales que si $k \geq k_0$ se cumple que $|f(n,k)| \leq C \cdot k$. Pero, además, debido a la sumatoria, el dominio de $f(n,k)$ está restringido a $0 \leq k \leq n$. Realmente la constante C se puede elegir de tal forma que $|f(n,k)| \leq C \cdot k$ sea válida para toda k. Por lo tanto, como

$$\sum_{k=0}^{n} \{ \binom{n}{k} + O(k) \} = 2^n + f(n,0) + f(n,1) + \cdots + f(n,n)$$

y como además por desigualdad triangular se tiene que

$$\begin{aligned} |f(n,0) + f(n,1) + \cdots + f(n,n)| &\leq |f(n,0)| + |f(n,1)| + \cdots + |f(n,n)| \\ &\leq C \cdot 0 + C \cdot 1 + C \cdot 2 + \cdots + C \cdot n \\ &= C \sum_{i=0}^{n} i \\ &= C \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

Se tiene entonces que $|\sum_{i=0}^{n} f(n,i)| \leq C \frac{n(n+1)}{2}$ y, por consiguiente, $\sum_{i=0}^{n} f(n,i) = O(n^2)$ y, finalmente

$$\sum_{k=0}^{n} \{ \binom{n}{k} + O(k) \} = 2^n + O(n^2)$$

•

Una definición similar a la definición de O-grande es la definición de Ω-grande que daremos a continuación.

Definición 8.3 (Omega Grande) *Diremos que f es Omega Grande de g y lo escribiremos como $f = \Omega(g)$, si existen x_0 y c tales que para todo $x > x_0$ se cumple que $|f(x)| \geq c|g(x)|$*

Queda claro de la definición que si $f = O(g)$, entonces $g = \Omega(f)$. Un caso particularmente interesante ocurre cuando f es a la vez $O(g)$ y $\Omega(g)$

Orden Exacto

Definición 8.4 (Theta Grande (Θ-grande)) *Se dice que $f(x)$ es Theta Grande de $g(x)$ y se escribe $f(x) = \Theta(g(x))$ si $f(x)$ es simultáneamente O Grande de $g(x)$ y Omega Grande de $g(x)$. En otras palabras, f es Theta Grande de g si existen constantes positivas Δ, δ y x_0 tales que si $x > x_0$ entonces $\delta|g(x)| \leq |f(x)| \leq \Delta|g(x)|$.*

Si f es Theta Grande de g, decimos que tienen el mismo orden y lo representamos también por $f \asymp g$.

Ejemplo 8.6 *Dar una prueba gráfica de que $\sum_{i=0}^{n} i = \Theta(n^2)$.*

Explicación: La suma $\sum_{i=0}^{n} i$ se puede representar gráficamente como la suma del área de una sucesión de n rectángulos de base 1 y altura i, con $1 \leq i \leq n$, como se muestra en la Figura 8.1.

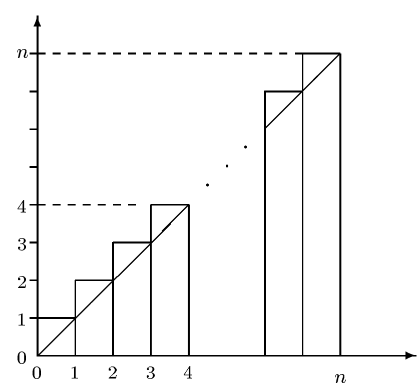

Figura 8.1: Suma $\sum_{i=0}^{n} i$

Podemos observar en la figura que para todo n el área de dichos rectángulos es menor o igual que el área del cuadrado de lado n, pero mayor que la del triángulo isorectángulo de catetos de longitud n. Por lo tanto, se tiene que

$$\frac{n^2}{2} \leq \sum_{i=0}^{n} i \leq n^2$$

con lo cual concluimos que

$$\sum_{i=0}^{n} i = \Theta(n^2).$$

Nótese que el área del triángulo es el área bajo la curva $f(x) = x$ y pudo haberse calculado por la integral $\int_0^n x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^n = \frac{n^2}{2}$. Obsérvese además que por este camino podemos hallar el valor de $\sum_{i=0}^{n} i$ pues la misma según la gráfica es la suma de un triángulo isorectángulo de catetos de longitud n más n triángulos isorectángulos de catetos de longitud 1, lo cual da $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n^2}{2} + \frac{1}{2}n$. •

Ejercicio 8.6 *Demuestre gráficamente que* $\ln(n!) = \Theta(n \ln n)$

A continuación mostramos un resumen de las definiciones básicas normalmente usadas cuando se pretende dar una aproximación asintótica a cierta expresión.

Definiciones Básicas

Dadas $\psi(x)$ y $\phi(x)$, dos funciones de x, positivas para todos los valores positivos de x

- o chica.
  Se dice que ϕ es o chica de ψ y se escribe, $\phi(x) = o(\psi(x))$ si $\lim_{x\to\infty} \frac{\phi(x)}{\psi(x)} = 0$
- O Grande.
  Diremos que ϕ es O Grande de ψ y escribiremos, $\phi(x) = O(\psi(x))$ si existe x_0 a partir del cual el cociente $\frac{\phi(x)}{\psi(x)}$ se encuentra acotado, esto es, si existe una constante $\Delta > 0$ tal que $\phi(x) \leq \Delta\psi(x)$ para todo $x \geq x_0$
- Ω Omega Grande.
  $\phi(x)$ es Omega Grande de $\psi(x)$—$\phi(x) = \Omega(\psi(x))$—si existen x_0 y $\delta > 0$ tales que $\phi(x) \geq \delta\psi(x)$ para todo $x \geq x_0$
- Θ Theta Grande (Orden exacto o Equivalencia asintótica).
  Se dice que $\phi(x)$ es Theta Grande de $\psi(x)$ y se escribe $\phi(x) = \Theta(\psi(x))$, si $\phi(x)$ es simultáneamente O Grande de $\psi(x)$ y Omega Grande de $\psi(x)$. En otras palabras, existen constantes positivas Δ, δ y x_0 tales que $\delta \leq \frac{\phi(x)}{\psi(x)} \leq \Delta$ si $x \geq x_0$. También suele escribirse $\phi(x) \asymp \psi(x)$

- Proporcionalidad asintótica.
  $\phi(x)$ es asintóticamente proporcional a $\psi(x)$ y lo denotaremos por $\phi(x) \sim A\psi(x)$ si $\lim_{x\to\infty} \frac{\phi(x)}{\psi(x)} = A$

- Igualdad asintótica.
  Diremos que $\phi(x)$ es asintóticamente igual a $\psi(x)$ y escribiremos $\phi(x) \sim \psi(x)$ si $\lim_{x\to\infty} \frac{\phi(x)}{\psi(x)} = 1$

8.3 Aproximaciones Asintóticas

El objetivo principal de esta sección es mostrar herramientas que permitan hallar aproximaciones asintóticas a ciertas cantidades que queremos contar pero que por alguna razón nos resultan muy difícil o imposible contar con exactitud. Una aproximación asintótica de la función f es una expresión de la forma $f(n) = g(n) + O(h)$ o $f(n) = g(n) + o(h)$ que resultan válidas sólo para valores suficientemente grandes de n. Una de tales aproximaciones es por ejemplo:

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + O(\frac{1}{n^6}) \ . \tag{8.1}$$

Donde γ es la constante de Euler y se define como $\lim_{n\to\infty} (H_n - \ln n)$ y su valor con 10 cifras exactas es 0,5772156649.

También resulta muy útil saber que la función factorial se puede aproximar por la siguiente fórmula, pues puede ayudar a simplificar los cálculos en muchas ocasiones.

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{5140n^3} + O(\frac{1}{n^4})\right) \ . \tag{8.2}$$

Más adelante mostraremos una tabla con algunas de las aproximaciones que deben tenerse en cuenta cuando se pretende aproximar asintóticamente cierta función dada.

Definición 8.5 (Error Absoluto y Relativo) *Se dice que una aproximación asintótica tiene un* **error absoluto** *de $O(g(n))$ si tiene la forma $f(n)+O(g(n))$, donde $f(n)$ es una expresión que no involucra a O, y se dice que tiene un* **error relativo** *de $O(g(n))$ si tiene la forma $f(n)(1+O(g(n)))$, en la cual f no involucra a O.*

Por ejemplo, la aproximación asintótica de H_n mediante la expresión (8.1) tiene un error absoluto de $O(n^{-6})$, mientras que la aproximación asintótica de $n!$ mediante la expresión (8.2) tiene un error relativo de $O(n^{-4})$. Realmente la aproximación (8.2) no tiene la forma requerida por la definición, $f(1+O(n^{-4}))$, pero la misma se puede reescribir como

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}-\frac{139}{5140n^3}\right)(1+O(\frac{1}{n^4})) \ .$$

Una manera de recordar la forma que debe tener la fórmula para saber qué error absoluto o relativo tiene cierta expresión, es recordar que cuando manipulabamos números que estaban afectados de un cierto error usábamos expresiones como $2,58 \pm 0,02$ que significa que el valor medido oscila entre 1,56 y 1,60. Esto es, que lo más que pudimos habernos equivocado es en 0,02 unidades. Mientras que si queremos exhibir el error relativo que estamos cometiendo extraemos factor común en la expresión original, esto es:

$$2,58 \pm \overbrace{0,02}^{\text{error absoluto}} = 2,58(1 \pm \underbrace{\frac{0,02}{2,58}}_{\text{relativo}})$$

El error relativo nos da una idea de qué tan grande es el error cometido en comparación con la cantidad que estamos midiendo. Si tengo 2 bolívares y pierdo 1 bolívar, me preocupo; pero si tubiera 1 millón de bolívares y perdiera 1 bolívar, ni me enteraría.

El error absoluto se relaciona con el número de decimales correctos a la derecha de la coma decimal si se ignora el término O, mientras que el error relativo corresponde al número de cifras significativas correctas.

Cuando se desea obtener una aproximación asintótica de una función dada, la tarea puede resultar fácil si dicha función es suma o producto de otras dos de las cuales se conoce ya una aproximación asintótica. Esta afirmación se formaliza por medio del siguiente teorema, cuya prueba es inmediata y se deja como ejercicio.

Teorema 8.2 *Si $f_1 = g_1 + O(h_1)$ y $f_2 = g_2 + O(h_2)$ son aproximaciones asintóticas de f_1 y f_2 respectivamente, entonces*
(a) si $f = f_1 + f_2$ entonces $f = g_1 + g_2 + O(\max\{h_1, h_2\})$ es una aproximación asintótica de f.
(b) si $f = f_1 f_2$, entonces $f = g_1 g_2 + O(\max\{h_1 g_2, h_2 g_1, h_1 h_2\})$ es una aproximación asintótica de f.

Una afirmación equivalente es cierta para $o-$chica en lugar de $O-$grande.

Ejercicio 8.7 *Halle una aproximación asintótica de*
(a) $C(n) = 2(n+1)H_n - 2n$ *con un error absoluto de* $O(n^{-4})$
(b) $D(n) = (H_n)^2$ *con un error absoluto de* $O(n^{-4})$.

Ejercicio 8.8 *Evalúe la suma* $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2}$ *con un error absoluto de* $O(n^{-3})$.

Cuando la función que se desea aproximar asintóticamente es de la forma f^α con α un número real, no natural, o involucra funciones logarítmicas o exponenciales, la situación se complica considerablemente y es menester en la mayoría de los casos considerar series de potencias. Empezaremos recordando un poco que es una serie de potencias y considerando algunas de sus propiedades para luego aplicarlas a la resolución de problemas concretos.

La siguiente tabla muestra una serie de aproximaciones que es necesario en algunos casos tener a mano y en mente.
Algunas aproximaciones Asintóticas:

$$
\begin{aligned}
H_n &= \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} + O(\frac{1}{n^6}) \ . \\
H_n^{(2)} &= \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{30n^5} - \frac{1}{42n^7} + \cdots \\
n! &= \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{5140n^3} + O(\frac{1}{n^4})\right) \ . \\
B_n &= 2[n \text{ par }](-1)^{n/2-1}\frac{n!}{(2\pi)^n}(1 + 2^{-n} + 3^{-n} + O(4^{-n})) \\
\frac{1}{1-z} &= 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + O(z^5) \ . \\
\ln(1+z) &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + O(z^5) \ . \\
e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + O(z^5) \ .
\end{aligned}
$$

Nota: algunas son válidas sólo en la cercanía de CERO...

Aproximación de Series de Potencia

Una serie de potencias es una suma infinita de la forma

$$S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x-c)^n \tag{8.3}$$

Se dice que una serie de potencias converge para $x = x_0$, si el valor de esta suma es un número real cuando se sustituye x por x_0. Recuérdese que toda serie de potencias converge por lo menos para $x = c$. Recuérdese también que toda serie converge en un entorno de radio R alrededor de c. Dicho radio se denomina radio de convergencia y puede valer entre CERO e INFINITO.

Se dice que una serie de potencias converge absolutamente si la serie de valores absolutos converge, esto es, en nuestro caso, si

$$S(x) = \sum_{n\geq 0} |a_n(x-c)^n| = \sum_{n\geq 0} |a_n||(x-c)|^n < \infty \tag{8.4}$$

Si la serie de potencias (8.3) converge absolutamente para algún valor $x = x_0$, entonces

$$S(x) = O(1) \quad \text{para todo} \quad |x| \leq |x_0|$$

Porque en dicho caso,

$$|S(x)| \leq \sum_{n\geq 0} |a_n||(x-c)|^n \leq \sum_{n\geq 0} |a_n||(x_0-c)|^n \leq k \cdot 1$$

Análogamente, como

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{0\leq i<m} a_i x^i + x^m \sum_{i\geq m} a_i x^{i-m} \\ &= \sum_{0\leq i<m} a_i x^i + x^m \cdot S'(x) \end{aligned}$$

si $S(x) = O(1)$, se tiene que $|S'(x)|$ está ocotada, por lo tanto $S'(x) = O(1)$ y por consiguiente,

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{0\leq i<m} a_i x^i + x^m O(1) \\ &= \sum_{0\leq i<m} a_i x^i + O(x^m) \end{aligned}$$

Empezaremos por un ejemplo sencillo

Ejemplo 8.7 *Hallar una aproximación asintótica de* $\sqrt[n]{a}$ *con error absoluto de* $O(n^{-4})$

Explicación: El truco consiste en escribir adecuadamente $\sqrt[n]{a}$ y luego aplicar la serie de e^x y truncar adecuadamente.

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a} &= e^{\ln \sqrt[n]{a}} = e^{\frac{\ln a}{n}} \\ &= 1 + \frac{\ln a}{n} + \frac{\ln^2 a}{2n^2} + \frac{\ln^3 a}{6n^3} + O(n^{-4}) \end{aligned}$$

•

Los dos siguientes ejemplos son un poco más interesantes y es necesario recordar las series notables. En la tabla siguiente se dará un resumen de las series que aparecen con mayor frecuencia.

$$\begin{array}{rcll}
e^x & = & 1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!} & \\
\dfrac{1}{1-x} & = & 1+x+x^2+x^3+\cdots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n & |x|<1 \\
\ln(1-x) & = & -x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-\cdots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n} & |x|<1 \\
\operatorname{sen} x & = & x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\cdots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} & \\
\cos x & = & 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^6}{6!}+\cdots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} & \\
\arctan x & = & z-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{x^7}{7}+\cdots=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)} &
\end{array} \qquad (8.5)$$

Ejemplo 8.8 *Demuestre que si $f \prec 1$, entonces*

$$\ln(1+O(f(n))) = Of(n)$$

Explicación: Sea $\ln(1+g) \in \ln(1+O(f(n)))$, entonces $g = O(f)$ y, por lo tanto, se tiene que existe n_0' y k tales que $|g| \le k|f|$; además como $f \prec 1$ se tiene que $\lim_{n\to\infty}\frac{f}{1} = 0$, por lo tanto, $\forall\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n > n_0$ $|f(n)| < \varepsilon$. Tomando ε tal que $\varepsilon \cdot k < 1$ se tiene que

$$|g| \le k|f| \le c < 1 \quad \text{si} \quad n > n_0$$

Por lo tanto, para $n > n_0$ se tiene que $|g(n)| < 1$ y por consiguiente podemos usar la serie de $\ln(1+g(n))$ si $n > n_0$, esto es

$$\begin{array}{rcll}
\ln(1+g) & = & g-\dfrac{g^2}{2}+\dfrac{g^3}{3}-\cdots & \text{si} \quad |g|<1 \\
& = & g\cdot(1-\dfrac{g}{2}+\dfrac{g^2}{3}-\cdots) & \text{si} \quad |g|<1
\end{array}$$

Nótese que **no tiene sentido** usar la serie del logaritmo si no tenemos la certeza de que $|g(n)| < 1$. Para n suficientemente grande ($n \geq n_0$), la serie dentro del paréntesis está acotada por $1 - \frac{c}{2} + \frac{c^2}{3} - \cdots$, que es una serie convergente, porque la serie del logaritmo converge si $|x| < 1$. Por consiguiente,

$$|\ln(1+g)| \leq |g| \cdot k' \leq K|f|$$

esto es, $\ln(1+g) = O(f)$ **Q.E.D.** •

Ejemplo 8.9 *Demuestre que si $f(n) = O(1)$, entonces*

$$e^{O(f(n))} = 1 + O(f(n))$$

Explicación: Si $f = O(1)$, entonces existe k tal que para n suficientemente grande $|f(n)| \leq k \cdot 1$. Sea $g \in O(f)$, entonces $e^g \in e^{O(f)}$ quiero ver que $e^g \in 1 + O(f)$. Por transitividad $g \in O(1)$, esto es, existen n_0 y k' tales que si $n \geq n_0$ entonces $|g| \leq k'$. Además, usando la serie de e^x se tiene que

$$e^g = 1 + g + \frac{g^2}{2!} + \cdots = 1 + g(1 + \frac{g}{2!} + \frac{g^2}{3!} + \cdots)$$

Pero $1 + \frac{g}{2!} + \frac{g^2}{3!} + \cdots$ es $O(1)$, porque como $g = O(1)$ para $n \geq n_0$ la suma $1 + \frac{g}{2!} + \frac{g^2}{3!} + \cdots$ está acotada por $1 + \frac{k'}{2!} + \frac{k'^2}{3!} + \cdots$, que es una serie convergente, que converge por ejemplo a K. Luego $g(1 + \frac{g}{2!} + \frac{g^2}{3!} + \cdots)$ es $O(g)$ y por transitividad es $O(f)$, por lo tanto, $e^g \in 1 + O(f)$ **QED** •

Ejercicio 8.9 *Demuestre que si $f = o(1)$ y $fg = O(1)$, entonces se tiene que $(1 + O(f))^{O(g)} = 1 + O(fg)$*

Ejercicio 8.10 *Demuestre que si $u = o(1)$ (equivalentemente $u \prec 1$), entonces*

$$\begin{aligned} (a)\ \frac{1}{1-u} &= 1 + u + u^2 + \cdots + u^n + O(u^{n+1}) \\ (b)\ \frac{1}{1-u} &= 1 + u + u^2 + \cdots + u^n + o(u^n) \end{aligned}$$

8.4 Representaciones y Desarrollos Asintóticos

Escala de comparación

Definiremos la escala de comparación $\mathcal{E}$ inductivamente por las reglas siguientes

- Las funciones $1, n^\alpha, (\log n)^\beta, \exp(\gamma n^p)$, donde α, β, γ son números reales no nulos, y p es un entero positivo pertenecen a la escala $\mathcal{E}$.
- Si $g_1 \in \mathcal{E}$ y $g_2 \in \mathcal{E}$ entonces $g_1 g_2 \in \mathcal{E}$

Esta escala de comparación satisface las siguientes propiedades

Propiedad 1 Para todo $g \in \mathcal{E}$, $g > 0$ para n suficientemente grande

Propiedad 2 $\forall g \in \mathcal{E}$, si $g \neq 1$ entonces $g \to 0$ ó $g \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

Propiedad 3 Dos funciones diferentes cualesquiera de $\mathcal{E}$ son comparables mediante o ó O.

Cómo comparar en esta escala

Dos funciones cualesquiera de la escala se pueden comparar con solo comparar γ, p, α, β. La comparación se hace según el orden lexicográfico de las $4-$tuplas correspondientes.

En algunos casos, consideraremos una escala de conparación formada por una sub-familia de $\mathcal{E}$. Por ejemplo, la clase de las funciones de la forma $n^\alpha(\log n)^\beta$. En ciertos casos, podríamos estar interesados en agrandar la familia $\mathcal{E}$ para permitir los logaritmos repetidos como $\log\log$, $\log\log\log\ldots$ o las exponenciales de compuestas como $\exp(\exp)$, $\exp(\exp(\exp))$

En fin, generalmente, denominamos escala de comparación a toda familia de comparación que satisface las tres propiedades 1,2,3.

Comúnmente decimos que una función f es

- acotada, o constante, si $f = O(1)$
- logarítmica, si $f = O(\log n)$
- lineal, si $f = O(n)$
- cuadrática, si $f = O(n^2)$
- exponencial, si existe una constante $c > 1$ tal que $f = O(c^n)$

Desarrollo Asintótico

Comparar una función $f(n)$ con una función de la escala $\mathcal{E}$, es buscar si f posee una parte principal cg en $\mathcal{E}$, es decir si existe una constante $c \neq 0$ y una función $g \in \mathcal{E}$ tal que $f \sim cg$ cuando n tiende a infinito. Se probará que si tal función existe es única.

Si $f \sim cg$, esto es, $f = cg + o(g)$. Para aproximar f con mayor precisión uno compara de nuevo la función $f - cg$ con las funciones de $\mathcal{E}$. Si $f - cg$ tiene una parte principal en $\mathcal{E}$, se tiene que forzosamente $h = o(g)$ y que $f = cg + dh + o(h)$. Este proceso se puede repetir. Si generalizamos se tiene el siguiente resultado.

Definición 8.6 *Llamaremos un desarrollo asintótico en k términos de la función f con respecto a $\mathcal{E}$ a la suma $c_1 g_1 + c_2 g_2 \cdots c_k g_k$ tal que*

$$f = c_1 g_1 + c_2 g_2 \cdots c_k g_k + o(g_k)$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_k$ son constantes reales y $g_1, g_2, \ldots, g_k$ son funciones en $\mathcal{E}$ tales que para todo i en $[1..k-1]$, $g_{i+1} = o(g_i)$.

Observaciones:

1. El desarrollo asintótico de una función, si existe, es único.
2. Si f admite un desarrollo asintótico, por la propiedad 1, existe un n_0 tal que si $n > n_0$, entonce $f(n) \neq 0$. Además, por la propiedad 2, $|f|$ debe tender a 0 ó ∞ cuando n tiende a infinito. Esto permite concluir que una función como $n \sin \frac{\pi n}{2}$ no admite un desarrollo asintótico.
3. Por lo general los desarrollos asintóticos de interés tienen pocos términos. Por ejemplo, de acuerdo a la observación anterior, la función $f(n) = n^2 + n \sin \frac{\pi n}{2}$ admite sólo un desarrollo asintótico, a saber, $f(n) = n^2 + o(n^2)$.

Representaciones Asintóticas

El uso de la notación o chica es útil en la búsqueda de una equivalencia asintótica de una función f. Pero, cuando $f \sim g$, ella no permite apreciar la velocidad de convergencia de $\frac{f}{g}$ hacia 1.

Sean, por ejemplo, f_1 y f_2 dos funciones tales que, para n suficientemente grande

$$|f_1(n) - 1| \leq \frac{5}{n}$$

$$|f_2(n) - 1| \leq \frac{8}{n^3}$$

Es probable que f_2 tienda a 1 más rápido que lo que lo hace f_1 cuando n tiende a infinito. Pero esta apreciación se pudo haber obtenido de las siguientes fórmulas, que son más precisas.

$$f_1(n) = 1 + O(\frac{1}{n})$$

$$f_2(n) = 1 + O(\frac{1}{n^3})$$

Es por esta razón que la notación O grande es de gran utilidad en la estimación asintótica de una función

Definición 8.7 *Se dice que una función f admite una representación asintótica con k términos en $\mathcal{E}$ si existen contantes reales $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$ y funciones $g_1, g_2, \ldots, g_k \in \mathcal{E}$ tales que*

$$f(n) = c_1 g_1 + c_2 g_2 + \cdots + c_{k-1} g_{k-1} + O(g_k)$$

donde para todo i en $[1..k-1]$, $g_{i+1} = o(g_i)$.

Observaciones:

1. Si f admite un desarrollo asintótico de k términos, entonces admite una representación asintótica de k términos.

2. Si f admite una representación asintótica de $k \geq 2$ términos, entonces admite un desarrollo asintótico de $k-1$ términos.

3. Si f admite una representación asintótica de $k \geq 2$ términos, entonces llamamos *parte principal* de f, a la suma $c_1 g_1 + c_2 g_2 + \cdots + c_{k-1} g_{k-1}$. Conforme a lo precedente, la *parte principal* de una función, si es que existe, es única.

4. Cuando $f = O(g)$, o mejor aun, $f = \Theta(g)$, se dice que g tiene el mismo orden de grandeza que f. Se dice que la representación $f = c_1 g_1 + O(g_2)$ tiene un error absoluto de $O(g_2)$. Cuando $f = c_1 g_1(1 + O(g_2))$, el error relativo cometido es $O(g_2)$.

5. Cuando uno conoce la representación asintótica de dos funciones f_1 y f_2, aplicando las reglas de cálculo ... se obtiene fácilmente las de $f_1 + f_2$ y $f_1 f_2$. Se hace lo mismo si f^p si p es un entero positivo. Pero, en los problemas donde aparece f^α donde α es un número real, o $\ln f$ con $f > 0$ o $\exp(f)$, el método es más laborioso. Si estos casos se presentan, se buscará cambiar la función, de modo que intervenga la *clase de las funciones* $o(1)$, esto es, aquellas que tienden a CERO

cuando n tiende a infinito, y aplicar después los *desarrollos límites en la cercanía de 0* siguientes:
$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln n + \gamma + O(\frac{1}{n})$
$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^n + o(u^n)$ ó $O(u^{n+1})$
$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \cdots \frac{u^n}{n!} + o(u^n)$ ó $O(u^{n+1})$
$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{u^n}{n} + o(u^n)$ ó $O(u^{n+1})$
$(1+u)^\alpha = \sum_{i=0}^{n} \binom{\alpha}{i} u^i + o(u^n)$ ó $O(u^{n+1})$

En la siguiente sección se justificará el uso de tales desarrollos.

Familia Logaritmo Exponencial

La familia de las funciones Logaritmo-Exponencial se define recursivamente como la menor familia que satisface las siguientes propiedades

- La función constante $f(n) = \alpha$ está en $\mathcal{L}$, para todo real α
- La función identidad $f(n) = n$ está en $\mathcal{L}$
- Si $f(n)$ y $g(n)$ están en $\mathcal{L}$, también lo está $f(n) - g(n)$
- Si $f(n)$ está en $\mathcal{L}$, también lo está $e^{f(n)}$
- Si $f(n)$ está en $\mathcal{L}$ y es "eventualmente positiva", entonces $\ln f(n)$ está en $\mathcal{L}$.

8.5 Fórmula de Sumación de Euler

$$\sum_{a \le k < b} f(k) = \int_a^b f(x)dx + \sum_{k=1}^{m} \frac{B_k}{k!} f^{(k-1)}(x) \Big|_a^b + R_m, \tag{8.6}$$

$$\text{donde } R_m = (-1)^{m+1} \int_a^b \frac{B_m(\{x\})}{m!} f^{(m)}(x)dx, \quad \begin{array}{l} a \le b \text{ enteros} \\ m \ge 1 \text{ entero} \end{array} \tag{8.7}$$

8.6 Problemas

1. Demuestre que si $f = o(g)$, entonces $f = O(g)$.

2. Multiplique $(\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2}))$ por $(n + O(\sqrt{n}))$ y exprese el resultado en notación O.

3. Demuestre que $\ln n! = \Theta(n \ln n)$

4. Bajo qué condición podemos afirmar:
   Si $f_1 \prec g_1$ y $f_2 \prec g_2$, entonces $f_1 + f_2 \prec g_1 + g_2$. Dé un ejemplo en el cual la proposición anterior falle.

5. Demostrar que
$$1 + \frac{a}{\sqrt{n}} + O(n^{-1}) = (1 + \frac{a}{\sqrt{n}})(1 + O(n^{-1}))$$

6. (a) Demuestre que si $f = o(1)$, entonces
$$1 + f + O(g) = (1 + f)(1 + O(g)).$$
   (b) ¿Será suficiente pedir que $f = O(1)$? ¿Por qué...? Si no es suficiente, ¿qué hipótesis adicional se requiere?

7. Demuestre que si $u \prec 1$, entonces
$$\frac{1}{1-u^2} = 1 + u^2 + u^4 + \cdots + u^{2k} + O(u^{2k+2})$$

8. Demuestre que si $u \prec 1$, entonces
$$\frac{1}{(1-u)^2} = 1 + 2u + 3u^2 + \cdots + ku^{k-1} + O(u^k)$$

9. Demostrar que
   (a) $u = v + O(f)$ ssi $v = u + O(f)$
   (b) Si $v \neq 0$, entonces $u = v + O(1) \Longleftrightarrow u = v(1 + O(1/v))$

10. En cada uno de los siguientes pares de funciones decida cuál crece más rápido
    (a) $n^{\sqrt{n}}$, $\sqrt{n}^n$
    (b) $n^{(\ln n)}$, $(\ln n)^n$
    (c) $(n!)^n$, $n^{n!}$
11. Demuestre que para todos $b, c \in I\!R$ $\log_b n = \Theta(\log_c n)$. Más aún demuestre que son asintóticamente proporcionales y halle la constante de proporcionalidad.
12. Acote gráficamente a la suma $\sum_{i=0}^{n} i^2$ y demuestre que tiene orden exacto n^3, esto es, que $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \Theta(n^3)$.
13. Halle una expresión asintótica de $f(n) = e^{\frac{\ln n}{n}} - 1$
14. Hallar una representación asintótica de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2+k}$, con tres términos.
15. Hallar una representación asintótica de $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$, con tres términos.
16. Demostrar que
    $$(n+a)^{n+r} = n^{n+r}(1 + a(r - \frac{a}{2})n^{-1} + O(n^{-2}))$$
17. Mostrar que la sucesión C_n definida por la siguiente ecuación en diferencias
    $$C_n = a + bn + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} C_k$$
    tiene el mismo orden de magnitud que $n \log n$.
18. Halle una expresión asintótica de $\binom{2n}{n}$ con un error relativo del orden de $O(n^{-3})$.
19. Exprese $\sqrt[n]{n^2}$ como una serie de potencias usando el desarrollo de e^x y deduzca cuál es el orden de crecimiento de $\sqrt[n]{n^2}$
20. Use la fórmula de sumación de Euler para hallar una expresión asintótica de H_n. OJO....
21. La notación o chica tiene las siguientes propiedades:
    (a) $ko(f(x)) = o(f(x))$,

(b) $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$,

(c) $g(x)o(f(x)) = o(g(x)f(x))$,

(d) $o(g(x))o(f(x)) = o(g(x)f(x))$,

(e) $f(x) + o(f(x)) = f(x)\left(1 + \frac{o(f(x))}{f(x)}\right) = f(x)(1 + o(1))$,

(f) $(1 + o(1))(1 + o(1)) = 1 + o(1)$,

(g) $(1 + o(1))/(1 + o(1)) = 1 + o(1)$,

para toda $k \in I\!R$.

22. Demuestre que $\forall f_1, f_2, g_1, g_2$ se cumple que

$$\begin{aligned} (f_1 + O(g_1))(f_2 + O(g_2)) &= f_1 f_2 + O(f_1 g_2) + O(f_2 g_1) + O(g_1 g_2) \\ &= f_1 f_2 + O(\max\{f_1 g_2, f_2 g_1, g_1 g_2\}) \end{aligned}$$

8.7 Problemas Resueltos

1. Demuestre que si $f = o(1)$, entonces

$$u = v(1 + O(f)) \Leftrightarrow v = u(1 + O(f))$$

Prueba: Si $u \in v(1+O(f)) = \{h = v(1+f_1) : f_1 \in o(f)\}$, quiero ver que v pertenece a $u(1+O(f))$, esto es, quiero ver que $v = u + uf_2$,con $f_2 \in O(f)$.
Si $u \in v(1 + O(f))$, entonces $u = v(1 + f_1) = v + vf_1$ con $f_1 \in O(f)$, pero como $f_1 = O(f)$ se tiene por definición que $|f_1| \leq k|f|$ para algún k y para n suficientemente grande. Pero además como $f = o(1)$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} f = 0$, y por lo tanto también $\lim_{n\to\infty} f_1 = 0$. Por consiguiente $\frac{u-v}{v} \to 0$, y por lo tanto $\lim_{n\to\infty} \frac{u}{v} = 1$. Y como consecuencia, $\lim_{n\to\infty} \frac{v}{u} = 1$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{v-u}{u} = 0$. Por lo tanto, si definimos a $f_2 = \frac{v-u}{u}$ se tiene que f_1 es asintóticamente equivalente a f_2 y por consiguiente $f_2 = O(f)$ y en consecuencia $v = u + uf_2$ con $f_2 = O(f)$ **QED**

2. Halle una expresión asintótica de $\binom{3n}{n,n,n}$ con un error relativo del orden de $O(n^{-3})$.
Prueba: Usando la siguiente aproximación de la función factorial

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + O(n^{-3})\right)$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
\binom{3n}{n,n,n} &= \frac{(3n)!}{(n!)^3} \\
&= \frac{\sqrt{2\pi(3n)}\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}\left(1 + \frac{1}{12(3n)} + \frac{1}{288(3n)^2} + O(n^{-3})\right)}{\left[\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right]^3\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + O(n^{-3})\right)^3} \\
&= \frac{3^{3n+1/2}}{2\pi n}\cdot\frac{\left(1 + \frac{1}{36n} + \frac{1}{1592n^2} + O(n^{-3})\right)}{\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + O(n^{-3})\right)^3} \\
&= \frac{3^{3n+1/2}}{2\pi n}\cdot\frac{\left(1 + \frac{1}{36n} + \frac{1}{1592n^2} + O(n^{-3})\right)}{\left(1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} + O(n^{-3})\right)} \\
&= \frac{3^{3n+1/2}}{2\pi n}\left(1 - \frac{2}{9n} + \frac{2}{81n^2} + O(n^{-3})\right)
\end{aligned}$$

El lector debe desarrollar el cubo y luego efectuar la división para asegurarse de haber entendido como se sacaron las cuentas.

3. En cada uno de los siguientes pares de funciones decida cuál crece más rápido

(a) $n!^{\sqrt{n}}$, $\sqrt{n}^{\,n!}$
(b) $n^{\ln\ln n}$, $\ln(n!)$
(c) $n^{\ln\ln\ln n}$, $(\ln n)!$

Respuesta: (a) Si $k > 1$ para n suficientemente grandes se tiene que $n!^{\sqrt{n}} \leq k^{n!} \leq \sqrt{n}^{\,n!}$. La segunda desigualdad es válida si $n \geq k^2$, mientras que la primera se cumple porque el exponente crece mucho más rápido, tal vez se observe mejor si tomamos logaritmos

$$\sqrt{n}\log n! \leq n!\log k \leq n!\log\sqrt{n}$$

(b) Como $\ln(n!) = \Theta(n\ln n)$ basta con comparar $n^{\ln\ln n}$ vs $n\ln n$. Si tomamos logaritmo a ambas expersiones se tiene respectivamente $(\ln\ln n)\ln n$ y $\ln n + \ln\ln n$; luego como $(\ln\ln n)\cdot\ln n$ es mayor que $\ln n + \ln\ln n$ se tiene que $n^{\ln\ln n}$ es mayor que $n\ln n$ y en consecuencia mayor que $\ln(n!)$.
(c) Si tomamos logaritmo de ambas expresiones nos queda $(\ln\ln\ln n)\cdot\ln n$ vs $\ln[(\ln n)!]$ y como $\ln(n!) = \Theta(n\ln n)$ concluimos que $\ln[(\ln n)!] = \Theta(\ln n\cdot\ln\ln n)$. Por lo tanto $n^{\ln\ln\ln n} \prec (\ln n)!$

4. Demuestre que si $u \prec 1$, entonces

$$\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^k + O(u^{k+1})$$

Prueba: Como $u = o(1)$ se tiene por definición que para todo $\varepsilon > 0$ existe x_0 tal que si $x > x_0$, entonces $|u(x) - 0| \leq \varepsilon$, en particular tomando un $\varepsilon < 1$ se tiene la siguiente igualdad dada por la expansión en serie de Taylor de la función $\frac{1}{1-u}$.

$$\frac{1}{1-u(x)} = 1 + u(x) + u(x)^2 + \cdots + u(x)^n + u(x)^{n+1} + u(x)^{n+2} + \cdots$$

para todos los $x > x_0$. Esta puede escribirse como

$$\frac{1}{1-u(x)} = 1 + u(x) + \cdots + u(x)^n + u(x)^{n+1}(1 + u + u^2 + \cdots)$$

La suma $1 + u + u^2 + \cdots$ es $O(1)$, porque la misma está acotada por $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots$ que es una serie convergente debido a que $\varepsilon < 1$. Finalmente, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-u(x)} &= 1 + u(x) + \cdots + u(x)^n + u(x)^{n+1}(1 + u + u^2 + \cdots)\\
&= 1 + u(x) + \cdots + u(x)^n + u(x)^{n+1}O(1)\\
&= 1 + u(x) + \cdots + u(x)^n + O(u^{n+1})
\end{aligned}$$

Apéndice A

Respuestas y Sugerencias

Capítulo 1

1. $(m+1)^n$; principio fundamental.

2. $\binom{6}{2}\binom{4}{2}/3! = 15$; principio fundamental y pastor. También particiones de tipo $(0,3,0,0,0,0)$.

3. $6^{\underline{4}}$. Pricipio fundamental; elegir la pareja de cada hombre.

4. $2^{10} - 2^5$; principio de adición.

5. Lo que importa es el número de monedas que se le asigne a cada persona. Hay $\binom{n-1}{m-1}$ maneras.

6. 30, principio fundamental fijando la cara inferior, y coloreando la superior y las laterales en ese orden.

7. (a) n^k, (b) $n!S_n(k)$.

8. (a) $5!$, (b) $4!\binom{6}{1} + 3!\binom{6}{2} + \frac{1}{2}(2!)^2\binom{6}{3}$, (c) 600.

9. 360. Pastor.

10. 945. Como el ejercicio 2.

11. (a) $\binom{m}{n}$, (b) $\left(\!\binom{m}{n}\!\right)$, (c) $\binom{m}{n}$, (d) $m^{\underline{n}}$.

12. 2002.

13. (a) $(k+1)^n$, (b) $(k+1)^n$, (c) $(2^k-1)^n$.

14. 126.
15. $q(q-1)(q-2)(q^2-2q+2)$. Chequee el caso $q=3$.
16. (a) k^n, (b) $k^{\underline{n}}$, (c) $\left(\!\binom{k}{2}\!\right)^n$, (d) $\binom{k}{2}^n$.
17. Principio de adición. Clasificar los $k-$subconjuntos de $[m+n]$ adecuadamente.
18. $\binom{m+n}{m}$.
19. (a) $\binom{n-1}{k-1}$, (b) $\binom{n+k-1}{k}$.
20. Usar el principio fundamental: $i-$ésima operación colocar la $i-$ésima persona en las k taquillas.
21. 34650, 33810.
22. $2^{|A|\times|B|}$
23. $\binom{m+n}{m}$
24. $3\binom{100}{3}+10^6$
25. 2600

Capítulo 2

1. $\frac{1}{4}(5-\frac{1}{5^n})$
2. $a\frac{r^m-r^{n+1}}{1-r}$
3. $\frac{(n-m+1)(n+m)}{2}$
4. a_n-a_{m-1}
5. (a) $\frac{n(n+1)}{2}$, (b) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, (c) $(\frac{n(n+1)}{2})^2$
6. $\frac{(s-r+1)(r+s)(n-m+1)(n+m)}{4}$
7. $(n-1)2^{n+1}+2$. Usar o calcular el valor de la serie geométrica $\sum_{0\leq i\leq n}2^i$
8. Como en el ejercicio anterior puede perturbar la suma, escribirla como una suma doble e invertir el orden de sumación o puede derivar la serie geométrica

9. n^2

10. (a) $\frac{n}{n+1}$, (b) $\frac{n-m+1}{(n+1)m}$ (c) 1. Descomponer en fracciones simples y cambiar variables

11. Paso clave: $H_{k+1} = H_k + \frac{1}{k+1}$

Capítulo 3

1. Simetría y fórmula $\binom{n}{k}k = n\binom{n-1}{k-1}$

2. $n2^{n-1}$. Usar la fórmula $\binom{n}{k}k = n\binom{n-1}{k-1}$

3. Como en ejercicio anterior y luego usar simetría y convolución de Vandermonde

4. Puede probarlo algebraicamente. Intente hallar una prueba combinatoria

5. Puede necesitar usar la fórmula de sumas superiores del ejemplo 3.3 de la página 46

6. Principio de adición. Clasifique los $p+1-$subconjuntos de $[n+1]$ según su elemento máximo

7. El argumento es similar al del ejemplo 3.1

8. Derive o integre según le convenga

9. $i^3 = \binom{i}{1} + 6\binom{i}{2} + 6\binom{i}{3}$ y $\sum_{1\leq i\leq n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
   $i^4 = \binom{i}{1} + 14\binom{i}{2} + 36\binom{i}{3} + 24\binom{i}{4}$

10. Usar la fórmula $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ y cambiar variables

11. Sin comentarios. Note que las primeras cinco potencias de 11 son las primeras cinco líneas del triángulo de Pascal

12. Transforme la suma hasta $\frac{1}{n+1}\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{k}\binom{n+1}{k+1}(-1)^k$ aplicando el ejemplo 3.1 simetría y fórmula $\binom{n}{k}k = n\binom{n-1}{k-1}$. Finalmente use $\binom{n}{k} = (-1)^k\binom{k-n-1}{k}$ y $\sum_k \binom{n}{k}\binom{m}{k+r} = \binom{n+m}{n+r}$ para obtener como resultado $\frac{1}{n+1}\binom{0}{-n} = [n=0]$, esto es, cero si $n>0$ y uno si $n=0$

13. Seguir las instrucciones dadas

14. $n(n+1)2^{n-2}$. Tal vez necesite algún resultado previo

Capítulo 4

1. $26! - 2(23!) - 22!$
2. Conjunto base: las permutaciones de $[n]$, p_i: i está seguida de $i+1$
3. Cuente lo sugerido directamente y usando inclusión-exclusión
4. $\sum_{0\leq i\leq 4}(-1)^i(8-i)!\binom{4}{i} = 8! - \binom{4}{1}\cdot 7! + \binom{4}{2}\cdot 6! - \binom{4}{3}\cdot 5! + 4!$
5. $12!d_{12}$
6. $\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i\binom{n}{i}(n-1-i) + (-1)^n$
7. Observación crucial: Dado un conjunto de v vértices, un grafo es un subconjunto de pares, no ordenados, de dicho conjunto de vértices
8. Use la sugerencia dada pasando $k!$ al otro mienbro.
9. Cuéntelo directamente tomando en cuenta que un $m-$subconjunto de un $n-$conjunto es una $n-$tupla de ceros y unos con exactamente m unos.
10. Contarlo directamente. Como mal ubicado...
11. $\frac{1}{19!}\sum_{i=0}^{10}(-1)^i\binom{10}{i}2^i(19-i)!$
12. (a) Casos totales: n^p. Propiedades: p_i el vagón i está vacío. $N(p_1'p_2'\dots p_n') =$ "ningún vagón vacío" $N(p_1'p_2'\dots p_n') = n^p - \binom{n}{1}(n-1)^p + \binom{n}{2}(n-2)^p + \cdots + \binom{n}{n}(n-n)^p$. Luego la respuesta es $\sum(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^p/n^p$ (b) exactamente k ocupados es equivalente a exactamente $n-k$ vacíos, que se determinan con la fórmula $e_{n-k} = \sum_{i=n-k}^{n}(-1)^{i-n+k}\binom{i}{i-n+k}s_i$ (c) Por comparación la suma da... $n!$ o CERO.
13. Escriba el problema como una una ecuación sujeta a ciertas restricciones, y justifique que lo que se quiere contar son algunas de las composiciones fuertes de $2n+1$. La respuesta es $\binom{2n}{2} - 3\binom{n}{2}$.
14. (a) Casos totales: $n!$. Casos favorables: Al menos una reciba la carta que le corresponde. Por el complemento: $n!-$ ninguno reciba la carta que le corresponde. $N(p_1'p_2'\cdots p_n') = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(n-i)! = d_n$. Luego la probabilidad deseada es $(n!-d_n)/n!$. (b) Exactamente k reciban su carta. Es una aplicación de la fórmula $e_k = \sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\binom{i}{i-k}s_i$. La respuesta es $e_k/n! = \frac{1}{n!}\binom{n}{k}\sum_{i=k}^{n}(-1)^{i-k}\binom{n-k}{i-k}(n-i)!$
15. 15

Capítulo 5

1. Para obtener la recurrencia resuelva el determinante por la primera fila. Esta recurrencia se puede transformar en una de primer orden pasando D_{n-1} al primer mienbro para obtener $D_n - D_{n-1} = a^2(D_{n-1} - D_{n-2})$ que puede resolverse tomando $b_n = D_n - D_{n-1}$. También puede resolverse como ecuación de segundo orden con coeficientes constantes.

2. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 2$; $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Estos son los números de Fibonacci. Su solución es $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]$

3. (a) La recurrencia es: $a_n = 2a_{n-1} + 2$ con $a_1 = 2$, cuya solución es $a_n = 2^{n+1} - 2$. (b) ....

4. Sólo halle la recurrencia; su solución se deja como ejercicio para el próximo capítulo. La recurrencia es: $a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i}$

5. $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$ con $n \geq 2$; $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 5$

6. $C_n = C_{n-1} + 2(n-1)$, $n \geq 2$; $C_0 = 1$, $C_1 = 2$, $C_2 = 4$. Su solución es $C_n = n^2 - n + 2, n \geq 1$; $C_0 = 1$

7. $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$, $D_1 = a, D_2 = a^2 - bc$.

8. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$ con $a_1 = 2, a_2 = 4$

9. Use complemento para contar las secuencias con un número impar de ceros. La recurrencia es: $a_n = a_{n-1} + 3^{n-1}$, con $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 5$.

10. Aplicar el principio de adición dos veces conduce a $a_n = 3a_{n-1} + 3a_{n-2}$, con $a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 15$

11. $a_n = (n-1)a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$, con $a_1 = 0, a_2 = 1$

Capítulo 6

1. (a) $X(z) = \frac{1}{1-2z}$ y $x_n = 2^n$; (b) $X(z) = \frac{z}{(1-z)^3(1-2z)}$ y $x_n = 2^{n+2} - \frac{n^2+5n+8}{2}$; (c) $X(z) = \frac{3z^2+4z+2}{(1+z)^2(1-z)}$ y $x_n = \frac{9}{4} + \frac{1}{4}(2n-1)(-1)^n$.

2. $X(z) = \frac{C(z) - c_0 + a_0 x_0}{a_0 + a_1 z}$

3. $2^n - (n+1)$

4. Esta sucesión se llama sucesión de Fibonacci en honor al matemático italiano Leonardo de de Pisa quien vivió entre 1175 y 1250 y estudio la sucesión $0, 1, 1, 2, 3, 8, \ldots$. Fibonacci es una abreviación de *Filius Bonacci* que significa "hijo de Bonaccio." La solución es:
$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{-2}{1-\sqrt{5}})^{n+1} - (\frac{-2}{1+\sqrt{5}})^{n+1}] = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}]$.
Nota: si $f_0 = 0$ y $f_1 = 1$, la respuesta es: $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$.

5. $X(z) = 1 + \frac{z}{1-3z+z^2}$ y $x_n = \frac{\sqrt{5}}{5}[(\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n]$ si $n \leq 1$ y $x_0 = 1$.

6. Sug.: Multiplicar las series.

7. Sug.: Usar un argumento similar al del problema de las parentizaciones binarias.

8. Observe que a cada lado de cada cuerda debe quedar un número par de puntos. Coloque una cuerda y clasifique las posibles configuraciones en base al numero de puntos que quedaron de un lado y considere el nuevo problema como si tubiese dos nuevas circunferencias. Justifique.

9. La función generatriz es: $A(z) = \frac{z}{1-3z+z^2}$ y $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}2^n}[(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n]$

10. Use la definición de convolución para concluir que $Y(z)^2 - Y(z) + z = 0$. La solución es: $y_n = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!} = \binom{2n-2}{n-1}\frac{1}{n}$

11. Sug.: Manipular el sistema de ecuaciones en diferencia dado para obtener un sistema de ecuaciones que relacione las funciones generatrices de las sucesiones.

Capítulo 7

1. (a) $\frac{-x^{(1)}}{h} + \frac{2^{x-1}}{2^h-1} + c(x)$; (b) $\frac{x^{(4)}}{4h} + x^{(3)} + \frac{(h^2-1)x^{(2)}}{2h} + \frac{x}{h} + c(x)$;
(c) $\frac{(3x-1)^{(3)}}{9h} + c(x)$;(d) $\frac{3^{x+2}}{3^h-1} - 2x + c(x)$;

2. $1 - \frac{H_{n+1}+1}{n+2}$

3. Expresar $P(x)$ como combinación lineal de $\{(ax+b)^i : 0 \leq i \leq n\}$, procedear como en el ejercicio (5) de la página 141 y observar que cada nuevo coeficiente es el resto de dividir sucesivamente $P(x)$ por $(x - \frac{b}{a})$

4. (a) $2^{n+1}(n^2-5n+8)+16$; (c) $\frac{1}{(e-1)^2}[(ne-n-1)e^{n+1}+e]$;
(e) $[\frac{(n+1)^{(3)}}{3}-\frac{(n+1)^{(2)}}{2}+n+1]H_{n+1}-\frac{(n+1)^{(3)}}{9}+\frac{(n+1)^{(2)}}{4}-n-1$.

5. (a) $\frac{15}{8}+\frac{(2n+5)(2n+3)(2n+1)(2n-1)}{8}$; (b) $\frac{n(4n^2-1)}{3}$; (c) $\frac{1}{12}-\frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}$;
(d) $\frac{1}{4}-\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{4(2n+3)(2n+1)}$; (e) $\frac{\operatorname{sen}\alpha(n+\frac{1}{2})}{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{2}$

6. Sug.: Usar la fórmula de sumación por partes y el teorema fundamental del cálculo de sumas.

7. (a) $(n-2)2^{n+1}+4$; (b) $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; (c) $2-\frac{n+2}{2^n}$.

8.

9. $\sum H_x = x(H_x-1)$

10. Aplicar la definición de los operadores Δ y $\sum$.

11. $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{12}-\frac{1}{4(2n+1)(2n+3)})=\frac{1}{12}$

12. (a) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$; (b) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{4}-\frac{1}{2(2n+1)}+\frac{3}{4(2n+1)(2n+3)})=\frac{1}{4}$;
(c) $\frac{7}{36}-\frac{3n+7}{6(n+1)(n+2)(n+3)}$; (d) Diverge; (e) Diverge.

13. Sugerencia: Usar la fórmula para sumas de la forma $\sum \beta^x P(x)$, también puede usarse sumación por partes o transformada de Abel (Ver ejemplo 7.9)

14. (a) $2H_{n+1}+\frac{7}{n+2}-\frac{7}{2(n+2)(n+3)}-\frac{59}{12}$; (b) $\frac{11}{160}$; (d) $\lim_{n\to\infty}(\frac{4}{15}-\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{(2n+3)(2n+5)})=\frac{4}{15}$

15. Sug.: Usar la fórmula para sumas de la forma $\sum \beta^x P(x)$ o el teorema de sumación por partes.

Capítulo 8

1. Sug.: Usar las definiciones.

2. $\frac{\pi^2}{6}n-1+O(\sqrt{n})$

3. Sug.: Expresar $\ln n!$ como una suma y dar una prueba gráfica.

4. Sug.: Discuta su respuesta con su instructor.

5. Sug.: Tome $x \in 1+\frac{a}{\sqrt{n}}+O(n^{-1})$ y pruebe que pertenece a $(1+\frac{a}{\sqrt{n}})(1+O(n^{-1}))$.

6. Similar al ejercicio anterior.
7. Sug.: Use la serie de la función $\frac{1}{1-u}$ y proceda como en el ejercio (4) de la página 172.
8. Similar al ejercicio anterior.
9.
10. (a) Sug.: Usar proposición (8.1); (b) ...