Universidad Simón Bolívar
Departamento de Computación y
Tecnología de la Información
Estructuras Discretas I. Ci-2525

Práctica 3

1.- Se arrojan 4 monedas simultáneamente, si suponemos que:

a.- las monedas son iguales

b.- las monedas son distintas

¿Cuántos resultados distintos se pueden obtener en cada caso?. ¿Cuántos de los resultados tienen dos caras y dos cruces?

2.- En una clase de 10 alumnos van a repartirse tres (3) premios. De cuantas formas puede hacerse si:

a.- los premios son diferentes

b.- los premios son iguales

Sugerencia considere los casos siguientes: a) una persona no puede recibir más de un premio; b) una persona puede recibir más de un premio.

3.- En la empresa CH, la supervisora tiene una secretaria y otras tres auxiliares administrativas. Si hay que procesar 7 cuentas, de cuántas formas la supervisora puede asignar las cuentas tal que cada asistente trabaje al menos una cuenta y que el trabajo de la secretaria incluya la cuenta más cara.

4.- Determine el término central en la expresión $\left(\sqrt[3]{x} - \frac{x^{-2}}{2}\right)^6$, no desarrolle el producto.

Ayuda: resuelva aplicando el binomio de newton.

5.- Demuestre mediante un argumento combinatorio que $S_2(n) = 2^{n-1} - 1$.

6.- Demuestre utilizando argumentos combinatorios que:

a.- $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$ b.- $(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$

7.- Determine la forma cerrada de $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$

8.- Determine la forma cerrada de la suma $\sum_{i=m}^{n} (a_i - a_{i-1})$

9.- Determine la forma cerrada de la suma $\sum_{i=m}^{n} \sum_{j=r}^{s} ij$

10.- Determine la forma cerrada de la suma $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{5^i}$

11.- Aplicando el método de perturbación de la suma a $\sum_{i=1}^{n} iH_i$ determine la expresión cerrada para $\sum_{i=1}^{n} H_i$. Utilice que $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ para todo n, número natural distinto de cero.

12) Probar combinatoriamente que

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

13) Mostrar por un argumento combinatorio que

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \ldots + \binom{n-1}{p} + \binom{n}{p}$$

14) Probar combinatoriamente, que si

$\binom{m}{n}$: número de maneras de escoger n objetos de un grupo de m objetos (n<m), entonces:

a) $\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}$

b) $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1$

c) $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$

15) Probar la identidad 1x1! + 2x2! + 3x3! + ... + nxn! = (n+1)! - 1

16) Mostrar que:

a) $n\binom{m}{n} = n\binom{m-1}{n-1}$

b) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \ \ldots\ + n\binom{n}{n} = n \times 2^{n-1}$

17) Para cualquier n, mostrar que $\binom{n}{k}$ es máximo cuando:

$k = \dfrac{n-1}{2}\ ,\ \dfrac{n+1}{2}$ si n es impar

$k = \dfrac{n}{2}$ si n es par

18) Mostrar que:

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}$$

19) Mostrar que

$$\binom{r}{k} = \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{r-k}}\binom{r-1}{k} \qquad k \neq r$$

20) Si extendemos la definición de $\binom{m}{n}$ para $m \in \mathrm{R}$, de la forma

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!},$$

demostrar que

$$\binom{m}{n} = (-1)^n \binom{n-m-1}{n}$$

21) Halle la forma cerrada de $S_n = \sum_{0\leq k\leq n} k2^k$.
Aplicando el método de perturbación[2] tenemos

$$S_n + (n+1)2^{n+1} = \sum_{0\leq k\leq n}(k+1)2^{k+1} = \sum_{0\leq k\leq n} k2^{k+1} + \sum_{0\leq k\leq n} 2^{k+1}$$
$$= 2\sum_{0\leq k\leq n} k2^k + \sum_{0\leq k\leq n}(2)2^k = 2S_n + 2\frac{1-2^{n+1}}{1-2} = 2S_n + 2^{n+2} - 2$$

Finalmente

$$S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

22) Trate de usar el método de perturbación para evaluar $S_n = \sum_{1\leq k\leq n} kH_k$ y concluya que $\sum_{1\leq k\leq n} H_k = (n+1)H_n - n$.
Empleado el método de perturbación en S_n y sea $K = [1\ldots k]$

$$\begin{aligned}
S_{n+1} = S_n + (n+1)H_{n+1} = 1 + &\sum_{k\in K}(k+1)H_{k+1} \\
= \quad 1 + &\sum_{k\in K} kH_{k+1} + \sum_{k\in K} H_{k+1} \\
= \quad 1 + &\sum_{k\in K} k\left(H_k + \frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k\in K}\left(H_k + \frac{1}{k+1}\right) \\
= \quad 1 + &\sum_{k\in K} kH_k + \sum_{k\in K}\frac{k}{k+1} + \sum_{k\in K} H_k + \sum_{k\in K}\frac{1}{k+1} \\
= \quad 1 + &S_n + \sum_{k\in K} H_k + n
\end{aligned}$$

Notese que S_n aparece a la izquierda y derecha de la igualdad. Por lo tanto se cancela. Manipulando las expresiones restantes se obtiene

$$\sum_{k\in K} H_k = (n+1)\left(H_n + \frac{1}{n+1}\right) - 1 - n = (n+1)H_n - n.$$

23) Halle $S_n = sum_{k=1}^{n} k^2$ escribiendo la suma como una doble suma. Notando que

$$k^2 = \underbrace{k + \cdots + k}_{k \text{ veces}}$$

podemos escribir los términos de la sumación como sigue

$$
\begin{aligned}
S_n = & \\
& 1 + \\
& 2 + 2 + \\
& 3 + 3 + 3 + \\
& \vdots \\
& \underbrace{n + n + \cdots + n}_{n \text{ veces}}
\end{aligned}
$$

indexando las filas del arreglo anterior en j y las columnas en k, y sumando por columnas podemos reescribirla como sigue

$$S_n = \sum_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{j \leq k \leq n} k \right)$$

la cual se resuelve como sigue

$$
\begin{aligned}
S_n = & \sum_{1\leq j\leq n} \sum_{j\leq k\leq n} k \\
\overset{k\to k+j}{=} & \sum_{1\leq j\leq n} \sum_{j\leq k+j\leq n} (k+j) = \sum_{1\leq j\leq n} \sum_{0\leq k\leq n-j} (k+j) \\
= & \sum_{1\leq j\leq n} \left(\sum_{0\leq k\leq n-j} k + j \sum_{0\leq k\leq n-j} 1 \right) \\
= & \sum_{1\leq j\leq n} \left(\frac{1}{2}(n-j)(n-j+1) + j(n-j+1) \right) \\
= & \frac{1}{2} \sum_{1\leq j\leq n} (n-j+1)(n-j) + 2j(n-j+1) \\
= & \frac{1}{2} \sum_{1\leq j\leq n} (n^2+n-j^2+j) = \frac{1}{2} \left(\sum_{1\leq j\leq n} (n^2+n) - S_n + \sum_{1\leq j\leq n} j \right)
\end{aligned}
$$

Finalmente despejando S_n y manipulando obtenemos

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{3} \left((n^2+n) \sum_{1\leq j\leq n} 1 + \frac{1}{2} n(n+1) \right) \\
&= \frac{1}{6} \big(2n(n^2+n) + n(n+1) \big) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}
$$

24) Halle $S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$ escribiendo la suma como una doble suma.

Notando que $S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots$ entonces los términos de la suma se pueden escribir como

$$\begin{array}{l} S_n = \\ \quad 2+ \\ \quad 4+4+ \\ \quad 8+8+8+ \\ \quad \vdots \\ \quad \underbrace{2^n + 2^n + \cdots + 2^n}_{n \text{ veces}} \end{array}$$

indexando las filas del arreglo anterior en j y las columnas en k, y sumando por columnas podemos reescribirla como sigue

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{1 \le j \le n} \left(\sum_{j \le k \le n} 2^k \right) \overset{P_1}{=} \sum_{1 \le j \le n} \frac{2^j - 2^{n+1}}{1-2} \\ &= \sum_{1 \le j \le n} (2^{n+1} - 2^j) = n2^{n+1} - \sum_{1 \le j \le n} 2^j \overset{P_1}{=} n2^{n+1} - \left(\frac{2^1 - 2^{n+1}}{1-2} \right) \\ &= n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 = (n-1)2^{n+1} + 2 \end{aligned}$$

donde

$$P_1 \equiv \sum_{m \le k \le n} ax^k = a\frac{x^m - x^{n+1}}{1-x}$$

25) Cuánto vale la suma de los cuadrados de los primeros n números impares escrito como una suma doble.

Si N es el n-ésimo numero impar

$$\begin{aligned} S_n = & \sum_{\substack{1 \le k \le N \\ k \text{ impar}}} k^2 = \sum_{1 \le k \le n} (2k-1)^2 \\ = & \sum_{1 \le k \le n} (4k^2 - 4k + 1) = 4 \sum_{1 \le k \le n} k^2 - 2n(n+1) + n \\ = & \; 4 \sum_{1 \le j \le n} \sum_{j \le k \le k} k - 2n(n+1) + n \\ = & \; \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) + n \\ = & \; \frac{4}{3} n \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(n - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

26) Halle $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 H_k$.

Sea $K = [1 \ldots n]$ y aplicando el método de perturbación

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} = S_n + (n+1)^2 H_{n+1} = 1 + \sum_{k \in K} (k+1)^2 H_{k+1} \\
&= 1 + \sum_{k \in K} (k+1)^2 \left(H_k + \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k \in K} (k+1)^2 H_k + (k+1) \\
&= 1 + \sum_{k \in K} (k^2 + 2k + 1) H_k + (k+1) \\
&= 1 + \sum_{k \in K} k^2 H_k + 2 \sum_{k \in K} k H_k + \sum_{k \in K} H_k + \sum_{k \in K} k + \sum_{k \in K} 1 \\
&= 1 + S_n + 2 \sum_{k \in K} k H_k + ((n+1) H_k - n) + \frac{1}{2} n(n+1) + n
\end{aligned}
$$

Como S_n aparece a ambos lados de la igualdad se cancela. Finalmente obtenemos una expresion para $\sum_{k \in K} k H_k$ como sigue

$$
\sum_{k \in K} k H_k = \frac{1}{2} n(n+1) H_n - \frac{1}{4} n(n-1)
$$

Intuitivamente se debe perturbar $\sum_{1 \le k \le n} k^3 H_k$ para encontrar una expresión cerrada para $\sum_{1 \le k \le n} k^2 H_k$. Entonces aplicando el método de perturbación a $S_n = \sum_{1 \le k \le n} k^3 H_k$

$$
\begin{aligned}
S_{n+1} = S_n + (n+1)^3 H_{n+1} = 1 + \sum_{k \in K} (k+1)^3 H_{k+1} \\
&= 1 + \sum_{k \in K} (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) \left(H_k + \frac{1}{k+1} \right) \\
&= 1 + \sum_{k \in K} k^3 H_k + 3 \sum_{k \in K} k^2 H_k + 3 \sum_{k \in K} k H_k + \sum_{k \in K} H_k + \sum_{k \in K} (k+1)^2
\end{aligned}
$$

Nuevamente S_n aparace a ambos lados de la igualdad y se cancela. De la igualdad restante podemos deducir una expresión para $\sum_{1 \le k \le n} k^2 H_k$ como sigue

$$
\begin{aligned}
\sum_{k \in K} k^2 H_k = \frac{1}{3} \left[(n+1)^3 H_{n+1} - 1 - 3 \sum_{k \in K} k H_k - \sum_{k \in K} H_k - \sum_{k \in K} (k+1)^2 \right] \\
&= \frac{1}{3} \left[(n+1)^3 H_{n+1} - 1 - 3 \left(\frac{1}{2} n(n+1) H_n - \frac{1}{4} n(n-1) \right) \right. \\
&\quad \left. - ((n+1) H_n - n) - \left(\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - n(n+1) - n \right) \right] \\
&= \frac{1}{3} n(n+1)(n + \frac{1}{2}) H_n + \frac{1}{12} n(3n-1) - \frac{1}{18} n(n+1)(2n+1)
\end{aligned}
$$

27) Hallar una fórmula cerrada para $S_n = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\binom{m}{k}k$.

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\binom{m}{k}k &= \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\binom{m}{k}\binom{k}{1} \\
&\stackrel{P_1}{=} \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\binom{m}{1}\binom{m-1}{k-1} \\
&\stackrel{P_2}{=} m\sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}\binom{m-1}{m-k} \\
&\stackrel{P_3}{=} m\binom{n+m-1}{m}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
P_1 &\equiv \binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} \\
P_2 &\equiv \binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} \\
P_3 &\equiv \sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}\binom{p}{m-k} = \binom{n+p}{m}
\end{aligned}$$

28) Halle $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{1} \stackrel{P_1}{=} \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{1}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} \\
&\stackrel{k\to k+1}{=} n\sum_{1\leq k+1\leq n}\binom{n-1}{(k+1)-1} = n\sum_{1\leq k\leq n}\binom{n-1}{k} \stackrel{P_2}{=} n2^{n-1}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
P_1 &\equiv \binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} \\
P_2 &\equiv (x+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \text{ con } x = 1
\end{aligned}$$

Otra forma de solución es como sigue:
Dada P_2 podemos deducir que

$$\begin{aligned}
n2^{n-1} &= \frac{d}{dx}(x+1)^n\Big|_{x=1} = n(x-1)^{n-1}\big|_{x=1} = \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\Big|_{x=1} \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{d}{dx}x^k\Big|_{x=1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}\Big|_{x=1} = \sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}
\end{aligned}$$