CI2612: Algoritmos y Estructuras de Datos II

Blai Bonet

Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela

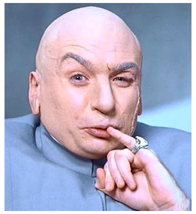
Hashing universal y hashing perfecto

Objetivos

- Hashing universal
- Hashing perfecto

Introducción

Si un **adversario malévolo** escoge las claves a ser insertadas en una tabla de hash (con función de hash conocida), el adversario puede seleccionar n claves que mapeen al mismo slot y **forzar un desempeño de peor caso**



http://i.kinja-img.com

Una forma de contrarestar esta situación es elegir la función de hash de forma **aleatoria e independiente** a las claves a insertar

Esta técnica, llamada **hashing universal**, puede garantizar buen desempeño esperado sin importar la claves usadas por el adversario

Hashing universal

Al inicio de la ejecución, hashing universal elige una función de hash de **forma aleatoria** de un conjunto $\mathcal{H}$ de **funciones disponibles,** y la utiliza para realizar todas las operaciones sobre la tabla

La randomización garantiza que con gran probabilidad ninguna secuencia de operaciones resulte en un comportamiento peor caso

Como en `RandomizedQuicksort`, el algoritmo puede comportarse de forma diferente en múltiples llamadas sobre la misma entrada

Clases universales de funciones de hash

Considere una clase $\mathcal{H}$ de funciones de hash $h : U \to \{0, \ldots, m-1\}$ (m es el número de slots)

Decimos que $\mathcal{H}$ es una **clase universal de funciones de hash** si para cada **par de claves distintas** $k, \ell \in U$, el número de funciones $h \in \mathcal{H}$ tal que $h(k) = h(\ell)$ es a lo sumo $|\mathcal{H}|/m$

En símbolos, $\mathcal{H}$ es una clase universal cuando

$$\max_{k,\ell \in U, k \neq \ell} |\{h \in \mathcal{H} : h(k) = h(\ell)\}| \;\leq\; |\mathcal{H}|/m$$

Equivalentemente, $\mathcal{H}$ es universal si para todo par de **claves distintas** k y ℓ, la probabilidad de que una función $h \in \mathcal{H}$ seleccionada **uniformemente al azar** genere una colisión es $\mathbb{P}(h(k) = h(\ell)) \leq 1/m$

Análisis de hashing universal

Considere la selección aleatoria de $h \in \mathcal{H}$ y defina la v.a. indicadora $X_{k\ell} = \mathbb{I}\{h(k) = h(\ell)\}$ para dos claves $k, \ell \in U$

Tomando esperanza con respecto a la elección de h y recordando la definición de $\mathcal{H}$, $\mathbb{E}[X_{k\ell}] = \mathbb{P}(h(k) = h(\ell)) \leq 1/m$

Defina $Y_k = \sum_{\ell \in T, \ell \neq k} X_{k\ell}$ igual al número de claves en la tabla T que son **distintas** a k y que son mapeadas por h al **mismo slot de** k

La esperanza de Y_k es

$$\mathbb{E}[Y_k] \;=\; \sum_{\ell \in T, \ell \neq k} \mathbb{E}[X_{k\ell}] \;\leq\; \sum_{\ell \in T, \ell \neq k} \frac{1}{m}$$

Análisis de hashing universal

Una vez que elegimos al azar la función h de hash, hacemos

Inserción: en tiempo $O(1)$ resolviendo colisiones con encadenamiento

Búsqueda: consideramos dos casos al buscar la clave k en una tabla T con n elementos

Caso 1: $k \notin T$. Toda la lista en el slot $h(k)$ es revisada. El número de elementos en dicha lista es $n_{h(k)} = Y_k$

Por otro lado, $|\{\ell \in U : \ell \in T \wedge \ell \neq k\}| = n$ ya que $k \notin T$

Entonces,

$$\mathbb{E}[n_{h(k)}] \;=\; \mathbb{E}[Y_k] \;\leq\; \sum_{\ell \in T, \ell \neq k} \frac{1}{m} \;=\; \frac{n}{m} \;=\; \alpha$$

Análisis de hashing universal

Una vez que elegimos al azar la función h de hash, hacemos

Inserción: en tiempo $O(1)$ resolviendo colisiones con encadenamiento

Búsqueda: consideramos dos casos al buscar la clave k en una tabla T con n elementos

Caso 2: $k \in T$. Como Y_k no cuenta la clave k, $n_{h(k)} = 1 + Y_k$

Por otro lado, $|\{\ell \in U : \ell \in T \wedge \ell \neq k\}| = n - 1$ ya que $k \in T$

Entonces,

$$\mathbb{E}[n_{h(k)}] \;=\; 1 + \mathbb{E}[Y_k] \;\leq\; 1 + \sum_{\ell \in T, \ell \neq k} \frac{1}{m} \;=\; 1 + \frac{n-1}{m} \;<\; 1 + \alpha$$

Análisis de hashing universal

Una vez que elegimos al azar la función h de hash, hacemos

Inserción: en tiempo $O(1)$ resolviendo colisiones con encadenamiento

Búsqueda: consideramos dos casos al buscar la clave k en una tabla T con n elementos

Conclusión: si $\mathcal{H}$ es universal, las búsquedas toman tiempo $O(1 + \alpha)$

Garantía provista por hashing universal

Considere un esquema de hashing universal donde las colisiones son resueltas por encadenamiento

Considere una **secuencia cualquiera de n operaciones** de tipo diccionario en una tabla de hash con m **slots**, inicialmente vacía, donde se realizan $O(m)$ inserciones

Veamos que el tiempo esperado para ejecutar las operaciones es $\Theta(n)$

Como existen $O(m)$ inserciones, $\alpha = O(1)$. Las inserciones y eliminaciones toman tiempo constante. Las búsquedas requieren tiempo esperado $O(1 + \alpha) = O(1)$

Garantía: las n operaraciones toman **tiempo esperado total** $\Theta(n)$

Garantía provista por hashing universal

Garantía: las n operaraciones toman **tiempo esperado total** $\Theta(n)$

La esperanza se calcula con respecto a la elección al azar de la función de hash y **no depende** de la secuencia de operaciones

No existe una secuencia de operaciones que resulte en desempeño de peor caso

Clases universales de funciones de hash

Hashing universal depende de la existencia de clases universales de funciones de hash

Mostraremos como construir una clase universal de funciones de hash de dos formas distintas:

– método matricial (tomado de notas de A. Blum)

– método algebraico

Clase universal: método matricial

Consideramos el caso cuando el número de slots en la tabla es $m = 2^b$ (potencia de 2) y las claves son de u bits (i.e. $\in \{0, \ldots, 2^u - 1\}$)

Sea M una **matriz** de 0s y 1s de dimensión $b \times u$. Definimos la función

$$h_M(k) \;=\; M \times k \quad \text{(módulo 2)}$$

donde la clave k es interpretada como un **vector columna** de dimensión $u \times 1$ y $h_M(k)$ es un **vector columna** de dimension $b \times 1$

Por ejemplo, para $b = 3$ y $u = 4$, considere la clave $k = 10 = 1010_b$ y

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entonces $h_M(k) = h_M(1010_b) = 110_b = 6$

Clase universal: método matricial

Considere la clase $\mathcal{H} = \{h_M : M \text{ es matriz 0/1 de dimensión } b \times u\}$

Veamos que para **claves distintas** $x \neq y$: $\mathbb{P}(h(x) = h(y)) = \frac{1}{m} = \frac{1}{2^b}$

Multiplicar $M \times k$ es equivalente a **sumar columnas de M seleccionadas por la clave k** (módulo 2). En el ejemplo,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & \mathbf{0} & 1 \\ \mathbf{0} & 1 & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{1} & 0 & \mathbf{1} & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

la primera y tercera columna de M se suman módulo 2 y resultan en el lado derecho de la igualdad

Clase universal: método matricial

Considere la clase $\mathcal{H} = \{h_M : M \text{ es matriz 0/1 de dimensión } b \times u\}$

Veamos que para **claves distintas** $x \neq y$: $\mathbb{P}(h(x) = h(y)) = \frac{1}{m} = \frac{1}{2^b}$

Considere ahora $x \neq y$ y suponga que difieren en el i-ésimo bit. Sin perder generalidad asuma $x_i = 0$ y $y_i = 1$

La elección al azar de $h = h_M$ puede pensarse como la **construcción aleatoria** de M. En particular, suponga que hemos construido M completamente excepto la i-ésima columna:

– como $x_i = 0$, el valor final $h_M(x)$ no cambia al **variar** la i-ésima columna

– como $y_i = 1$, el valor final $h_M(y)$ cambia con cada valor distinto de la i-ésima columna: si el j-ésimo bit de la columna cambia (flips), entonces el j-ésimo bit de $h_M(y)$ también cambia (flips)

Clase universal: método matricial

Considere la clase $\mathcal{H} = \{h_M : M$ es matriz 0/1 de dimensión $b \times u\}$

Veamos que para **claves distintas** $x \neq y$: $\mathbb{P}(h(x) = h(y)) = \frac{1}{m} = \frac{1}{2^b}$

Por ejemplo, considere $x = 1010_b$, $y = 0011_b$ y la **matriz incompleta** M:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 & c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$h_M(x) = [1,\ 1,\ 0]^t \qquad h_M(y) = [0 + a\ \ 1 + b\ \ 1 + c]^t$

Entonces, $h_M(x) = h_M(y)$ si y solo si $a = 1$, $b = 0$ y $c = 1$

Clase universal: método matricial

Considere la clase $\mathcal{H} = \{h_M : M$ es matriz 0/1 de dimensión $b \times u\}$

Veamos que para **claves distintas** $x \neq y$: $\mathbb{P}(h(x) = h(y)) = \frac{1}{m} = \frac{1}{2^b}$

Un solo valor para la i-ésima columna hace $h_M(x) = h_M(y)$

Existen $m = 2^b$ distintas i-ésimas columnas

$$\mathbb{P}(h_M(x) = h_M(y)) \; = \; \frac{1}{2^b} \; = \; \frac{1}{m}$$

Por lo tanto, **$\mathcal{H}$ es una clase universal de funciones de hash**

Clase universal: método algebraico

Primero escogemos un **número primo** p tal que todas las claves $k \in U$ son menores a p y $p > m$ (m es número de slots en T)

Considere $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ y $\mathbb{Z}_p^* = \{1, 2, \ldots, p-1\}$

Para $a \in \mathbb{Z}_p^*$ y $b \in \mathbb{Z}_p$, definimos la función de hash:

$$h_{ab}(k) \; = \; ((ak + b) \mod p) \mod m$$

y la clase de funciones de hash $\mathcal{H}_{pm} = \{h_{ab} : a \in \mathbb{Z}_p^* \text{ y } b \in \mathbb{Z}_p\}$

Mostraremos que $\mathcal{H}_{pm}$ es una clase universal de funciones de hash

La clase $\mathcal{H}_{pm}$ es universal

Considere dos claves distintas k y ℓ en $\{0, 1, \ldots, p-1\}$, y

$$r \; = \; (ak + b) \mod p \qquad\qquad s \; = \; (a\ell + b) \mod p$$

Observaciones:

- Como $k \neq \ell$, $r \neq s$ (ya que $\mathbb{Z}_p$ es un cuerpo)
- Cada uno de los $p(p-1)$ pares (a, b), con $a \neq 0$, genera un **par distinto** (r, s) donde $r \neq s$ y $0 \leq r, s < p$
- Existen $p(p-1)$ pares distintos (r, s) con $r \neq s$ y $0 \leq r, s < p$
- Para claves k y ℓ fijas, seleccionar un par (a, b) al azar de forma uniforme es equivalente a seleccionar un par (r, s) al azar de forma uniforme

La clase $\mathcal{H}_{pm}$ es universal

La probabilidad que las claves k y ℓ colisionen es igual a la probabilidad que $r \bmod m = s \bmod m$ cuando r y s son **escogidos de forma uniforme** en $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ con $r \neq s$

Para r fijo, de los $p-1$ posibles valores para s (distintos de r) solo existen a lo sumo $\lceil p/m \rceil - 1$ valores de s tales que $r \equiv s \bmod m$

De hecho. Defina $x = r \bmod m$. Los y congruentes con x mod m están entre

$$x,\ x+m,\ x+2m,\ x+3m,\ \ldots,\ x+\left(\left\lceil \frac{p}{m} \right\rceil - 1\right) m$$

Existen a lo sumo $\lceil p/m \rceil - 1$ de ellos distintos a x

La clase $\mathcal{H}_{pm}$ es universal

La probabilidad que las claves k y ℓ colisionen es igual a la probabilidad que $r \bmod m = s \bmod m$ cuando r y s son **escogidos de forma uniforme** en $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ con $r \neq s$

Para r fijo, de los $p-1$ posibles valores para s (distintos de r) solo existen a lo sumo $\lceil p/m \rceil - 1$ valores de s tales que $r \equiv s \bmod m$

$$\left\lceil \frac{p}{m} \right\rceil - 1 \ \leq\ \frac{p+m-1}{m} - 1 \ =\ \frac{p-1}{m}$$

La probabilidad que k colisione con ℓ es igual

$$\mathbb{P}(h(k) = h(\ell)) \ =\ \mathbb{P}(r \equiv s \mod m) \ \leq\ \frac{(p-1)/m}{p-1} \ =\ \frac{1}{m}$$

Hashing perfecto

Hashing perfecto

Hashing puede usarse para obtener **desempeño perfecto** cuando usamos un **conjunto de claves K estático**

En esos casos la tabla T es **pre-cargada** con las n claves en K y luego T se usa para determinar si una clave cualquiera pertenece a K

Un esquema de hashing es **perfecto** cuando las operaciones de búsqueda toman **tiempo constante en el peor caso**

Idea para obtener hashing perfecto

Veamos que una clase universal $\mathcal{H}$ de funciones de hash para un tabla con $m = n^2$ slots es un **hash perfecto con gran probabilidad**

Existen $\binom{n}{2}$ pares de claves distintas. Al elejir aleatoriamente $h \in \mathcal{H}$, la probabilidad de una colisión entre claves distintas es $\leq 1/m$

El valor esperado del número X de colisiones está acotado por

$$\mathbb{E}[X] \;=\; \sum_{k,\ell\in K, k<\ell} \mathbb{E}[X_{k\ell}] \;\leq\; \binom{n}{2}\frac{1}{m} \;=\; \frac{n(n-1)}{2n^2} \;\leq\; \frac{1}{2}$$

Usamos la desigualdad de Markov $\mathbb{P}(X \geq t) \leq \mathbb{E}[X]/t$:

$$\mathbb{P}(X \geq 1) \;\leq\; \mathbb{E}[X] \;\leq\; 1/2 \quad \text{y} \quad \mathbb{P}(X \geq 2) \;\leq\; 1/4$$

Hashing perfecto en espacio $O(n^2)$

Podemos construir un hashing perfecto eligiendo al azar $h \in \mathcal{H}$ hasta encontrar una función h^* que genere **cero colisiones**

La probabilidad que una función al azar tenga cero colisiones es $\geq \frac{1}{2}$. Entonces bastan **dos intentos en promedio** para encontrar h^*

El problema es que se require de espacio cuadrático en n que en muchos casos es demasiado

Para 1,000 claves necesitamos una tabla con un millón de slots, y para $|K| = 10,000$ necesitamos una tabla con 100 millones de slots

Esquema de 2 niveles para hashing en $O(n)$ espacio

Veremos como un esquema de **hashing de 2 niveles** resuelve el problema de espacio (ambos niveles con hashing universal)

La idea consiste en

- Tabla de hash de 1er nivel con n slots (n es número de claves)
- Las colisiones dentro de cada slot se resuelven usando otro esquema de hashing (2do nivel)
- Cada tabla de hash de 2do nivel es **perfecta** (sin colisiones)
- El número máximo de colisiones en un slot es "pequeño"
- Ambos niveles se implementan con **hashing universal**

Esquema de 2 niveles para hashing perfecto

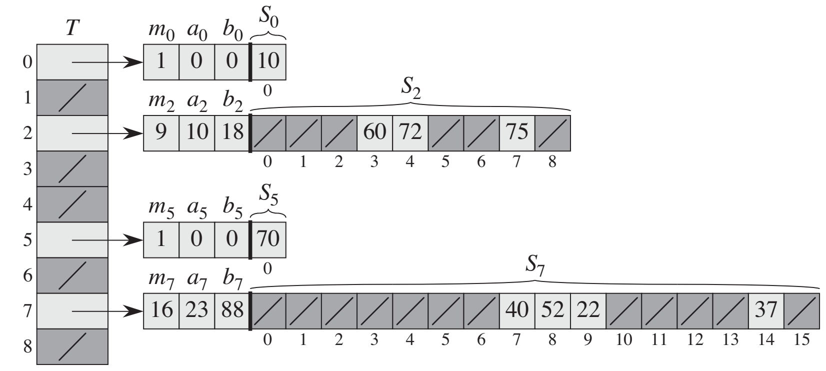


Imagen de Cormen et al. Intro. to Algorithms. MIT Press

$K = \{10, 22, 37, 40, 52, 60, 70, 72, 75\}$, $p = 101$ y $h = h_{ab}$ con $a = 3$ y $b = 42$

Algoritmo para hashing perfecto

1. Elegir primo p mayor a todas las claves en K y mayor a $4n$
2. Elegir al azar una función h_{ab} para el hash de 1er nivel en $\mathcal{H}_{pm}$
3. Pasar todas las claves por h_{ab} para calcular el número de claves por slot: $n_0, n_1, \ldots, n_{m-1}$
4. **Repetir los pasos 2 y 3** hasta que $\sum_{j=0}^{m-1} n_j^2 \leq 4n$
5. Para $j = 0, 1, \ldots, m-1$ hacer
6. Elegir al azar función $h_j = h_{a_j b_j}$ en $\mathcal{H}_{pm_j}$ para hash de 2do nivel donde $m_j = n_j^2$
7. Calcular el número de colisiones generadas por h_j para las n_j claves en el j-ésimo slot
8. **Repetir los pasos 6 y 7** hasta que no existan colisiones para h_j

El tiempo total esperado es $\Theta(n)$ y el espacio total requerido es $\Theta(n)$

Descripción del algoritmo para hashing universal

Primer nivel. Escogemos un primo p mayor a todas las claves en K y mayor a $4n$, y escogemos una función de hash al azar en la clase universal $\mathcal{H}_{pm}$

Segundo nivel. Para cada slot j con n_j elementos, elegimos al azar una función de hash $h_j = h_{a_j b_j}$ en la clase $\mathcal{H}_{pm_j}$, donde $m_j = n_j^2$, hasta encontrar una h_j que no genere colisiones (si $n_j = 1$, usamos $a_j = b_j = 0$)

Como cada tabla de segundo nivel es de tamaño cuadrático, cada función h_j la podemos encontrar en 2 iteraciones en promedio

Tiempo. El lazo tarda $O(m) = O(n)$ unidades de tiempo en promedio. Falta ver que podemos encontrar la función h_{ab} en $O(n)$ tiempo en promedio

Espacio. Necesitamos $m = n$ slots para la tabla de primer nivel y $4n$ slots en total para todas las tablas de segundo nivel

Análisis de tiempo para la escogencia de h_{ab}

Se necesitan n slots en la tabla de primer nivel y $\sum_{j=0}^{n-1} n_j^2$ slots para todas las tablas de segundo nivel

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{n-1} n_j^2\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(n_j + 2\binom{n_j}{2}\right)\right] = n + 2\mathbb{E}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n_j}{2}\right] \\
&= n + 2\mathbb{E}\left[\sum_{k,\ell\in K, k<\ell} X_{k\ell}\right] \leq n + 2\binom{n}{2}\frac{1}{m} \\
&= n + \frac{n(n-1)}{m} = 2n - 1 < 2n
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Markov, con probabilidad al menos $1/2$ la función h_{ab} escogida al azar funciona:

$$\mathbb{P}(\textstyle\sum_{j=0}^{n-1} n_j^2 \geq 4n) \leq 2n/4n = 1/2$$

Resumen

- Se pueden definir esquemas de hash que sean robustos ante adversarios y también esquemas de hashing perfecto
- Hashing universal se fundamenta en la existencia de clases universales de funciones de hash
- Dos clases universales de funciones: método matricial y método algebraico
- Hashing perfecto de espacio lineal se obtiene (en tiempo lineal) con un esquema de hashing universal de dos niveles

Ejercicios (1 de 2)

1. Sea p un primo, y k y ℓ dos enteros no-negativos. Sean (a,b) y (a',b') dos pares distintos de enteros tales que $0 \leq a,b,a',b' < p$ y $a,a' \neq 0$. Muestre que $(ak+b \bmod p, a\ell+b \bmod p)$ y $(a'k+b' \bmod p, a'\ell+b' \bmod p)$ son pares distintos

2. Muestre $\lceil \frac{p}{q} \rceil \leq \frac{p+q-1}{q} < \frac{p}{q}+1$ para **enteros** $p,q>0$

3. Implemente esquemas de hashing universal que utilicen clases universales de funciones de hash con el método matricial y el método algebraico

4. Evalue ambos esquemas sobre sequencias de operaciones de longitud m

5. Construya un hash perfecto para $K = \{23, 67, 12, 7, 75, 35, 42, 44, 45\}$

Ejercicios (2 de 2)

6. Calcule el número esperado de iteraciones que tiene que realizar un algoritmo que busca una función de hash perfecta (sin colisiones) para un conjunto K de n claves con una tabla de tamaño $m = n^2$ cuando se selecciona al azar una función candidata $h \in \mathcal{H}$, donde $\mathcal{H}$ es una clase universal de funciones de hash (asuma que evaluar la función de hash toma tiempo constante)

7. Calcule el número esperado de iteraciones que toma encontrar un función de hash $h = h_{ab}$ para hashing perfecto tal que $\sum_{j=0}^{m-1} n_j^2 \leq 4n$

8. Implemente un programa que reciba un conjunto K de claves y genere un hashing perfecto de 2 niveles para K

9. Evalue su implementación de hashing perfecto sobre varios conjuntos K de claves y estime el desperdicio de espacio en función de $n = |K|$