

# CI7621 – Tarea #1

Prof. Blai Bonet

Octubre 16/2013 — Octubre 30/2013

1.- Muestre formalmente la correctitud del algoritmo de ordenamiento lexicográfico visto en clase. (*Sugerencia:* defina y muestre por inducción un invariante para el lazo externo del algoritmo.)

2.- Implementar las dos versiones de  $\text{SELECT}(k, S)$  para seleccionar el  $k$ -ésimo elemento de un conjunto  $S$ . Hacer un análisis teórico del número de comparaciones hechas en para un conjunto  $S$  de  $n$  elementos. Correr los algoritmos sobre entradas de diferente tamaño, y comparar el número real de comparaciones realizadas y con las estimadas en el análisis teórico.

3.- Demostrar:

$$\sum_{i=2}^{n-1} i \ln i \leq \int_2^n x \ln x dx \leq \frac{n^2 \ln n}{2} - \frac{n^2}{4}.$$

4.- Considere una secuencia  $S$  de  $n$  elementos la cual contiene  $m_i$  copias del  $i$ -ésimo elemento para  $1 \leq i \leq k$ , donde  $n = \sum_{i=1}^k m_i$ . Mostrar que se *necesitan*

$$O\left(n + \log\left(\frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_k!}\right)\right) \quad (1)$$

comparaciones para ordenar  $S$  utilizando un algoritmo basado en comparaciones.

5.- Dar una implementación del procedimiento  $\text{HEAP-INCREASE-KEY}(A, i, k)$  que cambia el valor  $A[i] \leftarrow \max(A[i], k)$  y restablece la estructura de heap de forma apropiada. El procedimiento debe correr en tiempo  $O(\log n)$  donde  $n$  es el número de elementos en el heap.

6.- Dar una implementación del procedimiento  $\text{HEAP-DELETE}(A, i)$  que elimina el contenido del nodo  $A[i]$ , reduce el tamaño del heap en 1, y restablece la estructura de heap de forma apropiada. El procedimiento debe correr en tiempo  $O(\log n)$  donde  $n$  es el número de elementos en el heap.

7.- Describa un algoritmo para unir (merge)  $k$  listas ordenadas en una sólo lista ordenada. El algoritmo debe correr en tiempo  $O(n \log k)$  donde  $n$  es el número total de elementos en las  $k$  listas. (*Sugerencia:* utilice un heap.)

8.- (Extra.) En el problema 3, suponga que  $m_i = m$  para  $1 \leq i \leq k$ . Muestre que el número de comparaciones dado en (1) es suficientes para ordenar el conjunto  $S$ . (*Sugerencia:* utilice el Quicksort visto en clase y realice su análisis.)